SCHOLAE

LOGICO-MATHEMATICÆ,

in quibus

ARS COGITANDI ET ELOQUENDI,

INVENIENDI ET DEMONSTRANDI

circa unam propositionem,

quae est

Euclidis Elementorum theorema primum,

multis modis et magna exemplorum varietate exercetur.

Proponuntur et

VARIA GENERALIA DE METHODO,

et nova quaedam

tum ad logicam theoreticam pertinentia, tum de porismatibus in analysi geometrica antiquorum.

Auctore

FRIDERICO CAROLO HAUBER,

Ephoro seminarii Maulbronnensis, Würtembergiae.

Cum tabulis lithographicis octo.

Stuttgardiae,

in Officina Libraria Franckhiana.

(Sortimentsbuchhandlung.)

MDCCCXXIX.

THEOREMA

PRIMUM ELEMENTORUM EUCLIDIS

ejusque consectaria,

et iis respondentia

Problemata, theoremata contraria, conversa, contrarie conversa, nec non data nonnulla, porismata et loca demonstrata; cum variis animadversionibus didacticis, logicis, ac praecipue ad methodum mathematicorum pertinentibus.

AD INSTITUTIONEM ET EXERCITATIONEM

elementarem adjuvandam

edita

a Carolo Friderico Hauber,

Seminarii Maulbronnae in Würtembergia Ephoro.

PRAEFATIO.

Triennio circiter abhinc cum Vir meritissimus Wunderlich, Professor in Seminario, quod Maulbronnae est, praeter alia Mathesin docens, tum alia quaedam perhumaniter ad me scripsisset de mea Chrestomathia geometrica, quae Tubingae prodierat 1820., cuique ille amice favebat, et ea in scholis suis utebatur, tum etiam illud: magnopere se velle, ut ad quartam propositionem libri primi Elementorum Euclidis copia quaedam major in promtu esset exemplorum, quibus tirones, priusquam ultra illam propositionem progrederentur, in ea multifariam applicanda exerceri possent: rescripsi ei ego tum quidem, in illius Chrestomathiae appendice, ea quae est a pag. 324. ad finem, complura ejus generis, quae ille vellet, reperiri; nominatim S. 325. 5. — S. 326. 7. — S. 326. f. 8. — S. 327. 9. —

S. 329. 17; *a.*) — *S.* 337. *Satz* 1. — *S.* 339. *Satz* 5. — *S.* 340. *Satz* 8. 1r *Beweis.* — *S.* 341. *Satz* 9. 1r *Bew.* — *S.* 349. *f. Satz* 5., *a*) — *S.* 352. *Satz* 9. 1r *Bew. a*) — *S.* 360. *f. Satz* 1. *b*) *und c*) — *S.* 361. *f. Satz* 3. *a*) — *S.* 373. *f. no.* 9. — *S.* 385. *Satz* 2. quorum omnium demonstrationes per solam illam propositionem Elementorum quartam, sine ulla subsequentium in Elementis propositionum, absolverentur.

Postea autem, cum, quod ille Vir doctissimus intellexerat, quanti momenti esset ad novitiorum in Geometria profectus, si primum illud Euclidis theorema non utrumque percepissent tantum, sed prorsus familiare haberent, ut in eo, ubi usus esset, applicando dexteritate quadam et habilitate uterentur; id ipse et jam antea agnovissem, et subinde denuo admonerer simili ei, qua ille usus erat, experientia ejusdem muneris scholastici: visum est non alienum, plura ejus generis, praeter illa, quae in Chrestomatia exstant locis modo commemoratis, colligere, quo copiosior ad usum in docendo materia parata esset. Cui rei cum per aliquod tempus vacassem aestate superioris anni, ut plures

conquirerem propositiones tales, quae per solam Elementorum propositionem quartam demonstrari possent: earum copia se tanta obtulit, ut res admirationem haud paucis factura videretur, quod ex una sola propositione tam multae aliae deduci possent. Sed ex ea ipsa copia selectum feci proxima hyeme, postquam cum iis, qui tum erant et etiam nunc hic sunt, discipulis geometriam demonstrativam auspicatus eram: quarum in scholarum gratiam seposita illius copiae parte longe maxima, et nominatim propositionibus iis, quarum demonstratio, etsi nullo alio theoremate praeter primum Euclidis, seu propositionem Elementorum quartam, indigens, esset tamen aliquanto longior et per remotiora consequentia conficeretur, delegi aliquot ex simplicissimis et proximis illius prop. IVtae consectariis, quae discipulis proponerem, antequam a quarta propositione ad quintam in docendo progrederer. Atque haec erant illa, quae nunc hujus libelli capitis IIdi partem potiorem constituunt. Quae cum intellexissem nonnullis aliis augeri posse; tum vero iis respondentia quaedam problemata, theoremata contraria, conversa et contrarie conversa adjungi posse: ea coepi

singula suis digesta Capitibus, ut hic videbis in Capp. II. — VIII., elaborare sic, ut ad publicum parata usum essent, si forte aliorum quoque geometriae sive doctorum sive discipulorum usibus ea res inservire posset. Praemisi autem ipsam Euclideam propositionis quartae demonstrationem aliquanto fusius explicatam; existimans fore, ut sic quoque quorundam solidiori illius theorematis cognitioni, quod est totius geometriae fundamentum, aliquatenus consuleretur. Itaque praeter aliquot libri primi elementorum definitiones, et ejus postulata tria, ac partem aliquam axiomatum, ac denique tres primas propositiones Elementorum, nihil aliud ex geometria lectori notum esse postulamus in longe maxima hujus opusculi parte: his enim, quae dixi, instructus capita octo priora sine impedimento poterit percurrere.

Praeterea autem quum generalia illa, quae ad methodum pertinent, problematum ex theorematis deductionem, propositionum conversionem, contrariarum et contrarie conversarum formationem, demonstrationem, praecipue indirectam, et earum rerum leges quasdam, et alias res, quibus methodus Mathematicorum continetur, seorsim conside-

rare, et, quid de iis rebus in universum praecipi posset, cognoscere, non injucundum nec inutile plerisque discentium existimarem; quae res vulgaribus, prout hodie libris tradi solent, institutionibus logicis aut perquam leviter et perfunctorie attinguntur, aut, si fusius, sine exemplis tamen illustribus pertractari solent, quae vix aliunde melius, quam e geometria peti possunt: horum quoque generalium visum est ea, quorum in ipsa tractatione usus potissimum esset, in prooemiis capitum proponere. Inter quae theorema quoddam logicum se obtulit novum, quod equidem sciam; nec inelegans, et multiplicis in mathematica saltim doctrina usus; quod in capitis VIImi exordio proponetur; non indignum, ut spero, eorum cognitione, qui in logicis contemplationibus aliquanto accuratius versari operae pretium ducunt.

Quoniam autem inter generaliores illas methodi mathematicae, qualis a Graecis potissimum Geometris exculta fuit, partes praeter theorematum ac problematum notitiam comparanda est discipulis aliquantum provectis Datorum etiam notitia et analyseos, tum theorematum, tum praecipue problematum, cujus causa Data maxime inventa sunt,

et in qua priscos geometros multum operae posuisse constat; quibus et Porismatum et Locorum aliqua notitia addi potest: ne harum quidem rerum notitia adeo abstrusa videbatur, ut non earum elementaris quaedam explicatio ad hanc ipsam de propositione Elementorum quarta tractationem commodo nexu subjungi posset; quod factum est in capp. IX et X.; quae sola duo ultima hujus libri capita in lectore aliquam etiam posteriorum subinde in Elementis propositionum notitiam desiderant. Ceterum et in cap. X. de Porismatis novas observationes nonnullas attulisse me existimo.

Haec igitur omnia ex parte tantum orta sunt ejus, quam supra dixi a me collectam esse, copiae propositionum ex sola propositione Elementorum quarta demonstrabilium: quarum a l t e r a m p a r t e m, quae non tam brevi amplius et simplici argumentatione conficiuntur, sed longiori plerumque discursu opus habent, separatim congestam publice edendi, consilium in aliud tempus reservo, si haec p r i m a p a r s fautores nacta fuerit.

Plura autem fuere, quae persuaderent non intempestivum futurum, si haec in lucem publicam

exire paterer. Primum, quod de theorematis capite IIdo propositis usu compertum habebam, eorum in schola publica et cum promiscuis auditoribus tractationem pluribus profuisse ad primum scientiae geometricae gustum percipiendum. Deinde, quod alios quoque viros intelligentes passim videbam in ea esse sententia, ut, quamvis elementorum Euclidis tractatione nihil praestabilius esset ingeniis usu subactis aut per se satis firma cogitandi vi utentibus, tamen pluribus ad initia ejus doctrinae accedentibus aliquid, quod ad primam mathematicae facultatis exercitationem proponi posset facilius, praesto esse cuperent, quo ingenia gradatim mathematicae contemplationi et demonstrationi assuefieri possent. Nec mirum, in hac feraci paedagogicorum scriptorum aetate matheseos quoque a nonnullis rationem habitam esse, ut ejus aditus adolescentibus facilior redderetur: praecipue ex quo clarissimus Pestalozzi tum in materia ad hominis institutionem universim pertinente primas fere partes considerationi formae ac magnitudinis tribuit, tum de omni elementari docendi methodo talia praecepta inculcavit, quae veritate sua se

se commendarent, ut iis multi deinceps scriptores in hoc genere obsequendum putaverint. Itaque complures nuper in primo geometriae aditu complanando operam collocarunt: in quorum numero laudari plerosque invenio eorum, quos commemorat celeberrimus Diesterweg in libello „*Leitfaden für den ersten Unterricht in der Formen-, Grössen- und räumlichen Verbindungslehre, oder Vorübungen zur Geometrie für Schulen. Elberfeld* 1822" qui sunt Jos. Schmid, F. W. Fischer, Haenle, Ladomus, I. I. I. Hoffmann, v. Türk, Grossmann, Schmeisser, G. S. Ohm, M. Ohm, et alii, quorum libri illic nominantur.

Venit etiam illud in mentem, fore fortasse nonnullos, qui philosophicarum, quam mathematicarum contemplationum curiosiores, logicae speculationis gratia delectentur insigni, quod hic damus, exemplo, quam variis modis mens circa unam aliquam propositionem versari et exerceri possit; idque non, ut in logicis libris saepe fit, *ταυτολογίᾳ* fastidiosa, *πολυλογίᾳ* nihil promovente, et multa agendo nihil agente; sed magna et jucunda, ut speramus, etsi in una quodammodo re, diversarum tamen ejus

considerationum et circa ipsam mentis operationum varietate.

Sed in hac tractatione vix fieri poterit, quin nunc verborum copia, ut in enuntiationibus theorematum, capp. II. et III.; nunc cumulatae similium rerum explicationes, ut in problematibus cap. IV., quibusdam minus arrideant. Prius enim quod attinet: quum apud recentiores invaluerit ille mos in mathematicis scriptis, ut generales propositionum enuntiationes rarissime purae tradantur, sed iis aut misceantur aut in totum substituantur eae, quae secundum Proclum dicuntur Expositiones (de quo in Chrestomatia geometrica p. 174.); et in demontrationibus explicatiori propositionum antecedentium, quae in demonstrando usurpantur, respectui et productioni plerumque supersedeatur, ejusque vice sola numeri vel paragraphi respondentis citatio satis habeatur; tum signorum technicorum frequens usus ex recentioris Algebrae symbolica in geometriam quoque traductus sit: factum est, ut nimium quam parci verborum esse in hac quoque Matheseos parte, Geometria, consueverimus. Cujus βραχυλογιας commoda in ulteriori discentium pro-

gressu ut libenter agnoscimus, et omnino, quantum usu signorum et symbolicae in Mathesi promotum sit a recentioribus, et quid ea res nobis prae antiquis praebeat tum ad inveniendum, tum ad docendum subsidii, nemo gnarus infitiabitur: sic in prima elementari geometrica institutione haud scio, an illa dicendi brevitas, et signorum more et θέσει introductorum copia, utilitatem, quam debebat, vix praestet, et interdum animos discentium in primo rei aggressu obtundat et deterreat. Et scite dictum est a nonnemine, in re paedagogica et didactica esse quoddam temporis compendium majora creans impendia, contraque, impendium quoddam compendiosum: quod ut de tempore et opera, sic et de verborum usu vere dictum fuerit. Equidem, cum, ut in ceterorum signorum, sic in verborum usu totum in eo esse putem, ut ad res cogitandas mentem ducant et adjuvent quam maxime; in generalibus illis propositionum enuntiationibus, id quod pluribus capitis II. locis monui, hoc propositum habebam, ut iis cogitandi exercitatio et habilitas gigneretur et adjuvaretur, et nominatim rei ad antiquam ac genuinam methodum

pertinenti ingenia consuefierent; etsi illae enuntiationes passim prolixiorem verborum copiam postulabant.

Quod si aliqua fuerint, quorum videatur tractatio extracta longius: a doctioribus facile impetrabimus, ne id, quod novitiis opus sit, sua metiantur doctrina et intelligentia; novitiis autem, quorum disparia sunt ingenia, consultius in universum esse, si, dum prodesse studemus, supervacaneae nonnihil operae profundamus, quam si captanda brevitate obscuri et minus tractabiles fiamus, plerique in docendo experti mecum consentient.

Scripsi 1828.

Hauber,
Ephorus Maulbronnensis Seminarii.

CAPUT I.

Explicat demonstrationem propositionis quartae sive theorematis primi Libri primi Elementorum Euclidis.

I. *Praeliminaria de rectarum linearum ad se invicem applicatione.*

§. 1.

Si duae sint reetae lineae A B, C D, ubicumque positae, sive utraque in aliquo plano, sive non, et sive in eodem plano sive in diversis; et earum utraque ad alterutras partes terminata sit, hoc est, punctum in una earum A B assignatum sit A, quod sit extremum omnium ipsius punctorum, et quocum ipsa recta A B incipiat, itemque etiam in altera C D punctum aliquod extremum assignatum sit C a prioris extremo A diversum: concipi mente poterit, *Fig. 1.*

unam earum rectarum, ut A B, ad alteram C D non modo sic transferri, ut dictum illius extremum A in dictum hujus extremum C cadat; sed etiam ita ad ipsam applicari, ut prior A B super posteriorem C D jaceat, seu secundum hanc protendatur, seu in hujus directionem cadat.

Hoc igitur in rectis lineis fieri posse, ab unoquoque, qui ad ea, quae deinceps sequuntur, progredi velit, non ut concedat solum, sed potius ut ipse pro se quisque mente ac cogitatione concipiat, postulatur. Postulatur autem non in quibusvis lineis, sed nominatim in rectis. Nam prius quidem illud, quod diximus, ut linea ad lineam sic transferatur, ut extremo suo extremum alterius tangat, si tamen de reliquo disjungantur et separato utraque cursu ac directione protendantur; id in quibusvis lineis, non rectis solis, locum habet, verum etiam in altera recta, altera non recta; aut in duabus non rectis. Alterum autem, quod diximus, ut linea uno sui extremo ad alterius lineae extremum applicata, deinceps etiam eadem et communi cum ipsa directione progrediatur; id vero in aliis quam rectis lineis nequaquam aut perraro potest effici. Nam si altera recta sit, altera circularis, aut si sint circumferentiae duae inaequalium circulorum; eae, si, in uno extremo ut se tangant, facias, et quam strictissime ad se invicem accommodes; tamen statim ab se invicem divaricabuntur. In aequalium quidem circulorum circumferentiis fieri potest, ut una alteri in communi extremo sic applicetur, ut et reliquam viam et extensionem eandem et communem habeant. Sed de his hic jam non quaeritur: de rectis tantum lineis postulatur hoc loco id, quod dictum est.

Cum enim in recta linea difficile esset propter notionis ejus, quam nemo non facile animo concipit, summam tamen simplicitatem, discernere alia atque alia, quae illi notioni inessent, et eorum complexu formare definitionem rectae lineae, e qua singulae ejus proprietates, et quae circa ipsam contingere possent, deduci via ac ratione possent: idcirco opus erat omni de rectis lineis tractationi praemittere aliqua de recta linea, quae ipsius propria sunt, quorumque annotatio definitionis ejus vice fungi posset et ad demonstrationes utiliter adhiberi; cum in his illa rectae lineae definitio, quae quarta numero reperitur in definitionibus libri primi Elementorum, nunquam usurpetur. Talia sunt Euclidis Axioma 13um: duas rectas lineas non posse spatium comprehendere; et alterum, quod non quidem in Axiomatum numero libri primi recensetur, sed ad demonstrationem prop. 1mae lib. XI. in graeco textu adhibetur; illud inquam: non posse duas rectas lineas habere segmentum commune.

Itaque haec duo Axiomata ad eam, de qua agimus, rectae unius ad alteram applicationem hanc vim habent, ut, si duae rectae sic ad se invicem applicatae fuerint, ut et in communi extremo se invicem tangant, et praeter illud extremum et quasi commune initium suum, aliud praeterea punctum initio utcumque propinquum commune habeant; eae, quae inter illa duo puncta intercipiuntur partes utriusque, non possint non congruere et coalescere, cum alioqui spatium inter se comprehenderent, quod fieri, quippe a duabus rectis, nequit: porro autem etiam, quatenus ultra illud alterum punctum continuantur, non possint a se invicem sejungi, quia alioqui duae rectae lineae

segmentum commune haberent. Puta, si recta *Fig. 2.* A B ad rectam C D applicetur sic, ut et extremo suo A extremum C tangat, et praeterea super aliud ipsius C D punctum ipsi C quamlibet propinquum ut E incidat, habebunt primo partem C E communem, quia, si recta A B diverso itinere et flexu a C ad E veniret, duae rectae inter C et E jacentes haberentur, quae igitur spatium comprehenderent, quod fieri nequit per Axioma 13um; et rursus ultra E quoque continuare cursum suum non aliter quam eadem via possunt; quia, si diversa, duae rectae lineae forent habentes segmentum C E commune; quod item fieri nequit. Constat ergo, duas rectas lineas ex eodem puncto protensas, si utcumque paullulum et in minima initii sui parte eandem directionem sequantur, eandem etiam, ubi continuantur, secuturas esse. Quod et vulgo usurpamus, cum ope regulae lineam aliquam, num recta sit, inquirimus: nam cum regulae aciem lineae instar rectae habeamus; si ea ad aliquam ductam ubicumque lineam accommodari possit sic, ut ab ea nusquam aberret, deflectat aut subsultet, hanc quoque lineam rectam pronuntiamus: si vero alicubi deviet, ibi lineam a rectitudine aberrare judicamus: quod non faceremus, nisi hoc ipsum pro certo haberemus, duas rectas lineas ad se invicem applicatas in aliqua parte extensionis suae, in ea tota ad se invicem quadrare necesse esse. Sed pergimus.

§. 2.

Rectam lineam rectae lineae applicari mente atque cogitatione posse postulavimus sic, ut uno sui extremo unum hujus extremum tangat, et ab eo jam communi ex-

tremo utraque eadem directione protendatur. De reliquo utriusque extremo nihildum adhuc: nunc igitur de hoc quoque, si quod habeant. Non enim statim, si rectam lineam aliquam ponimus, initium quoque ejus aliquod esse et finem, simul ponere necessum habemus: verum etiam rectas nullo certo et assignato neque initio neque fine, aut si initio, non tamen fine; hoc est, aut neutra ex parte finitas, aut ad alterutram certe partem non finitas considerare nonnumquam ex usu est. Sed agedum, sint rectarum A B et C D, ut unum extremum A et C posuimus, in quibus illae quasi incipiant, sic altera extrema B et D, in quibus eaedem quasi desinant et finiantur; ut adeo utriusque earum sit certa quaedam et definita magnitudo seu longitudo. Tunc igitur facta ea, de qua §. 1. diximus, rectae A B super rectam C D applicatione tali, ut et punctum A super punctum C, et recta A B secundum directionem rectae C D cadat; deinceps puncta B et D quod attinet, unum ex tribus poterit contingere. Nam aut recta A B eo usque, quo recta C D, protendetur, et ibidem, ubi haec, finietur, seu superpositae A B extremum alterum B cum jacentis C D extremo altero D coincidet: aut superposita A B ulterius, quam jacens C D, inde a puncto C protendetur, et extremum ejus B ultra jacentis C D extremum D cadet; aut denique prior A B non eo usque, quo posterior C D, pertinget, sed prius vel citerius finietur, et intra posterioris extensionem alicubi subsistet, puncto B citra punctum D cadente.

Exempla dictorum, simul et eorum, quae dicenda restant, vulgaris praebebit experientia, si meminerimus, quo pacto agamus, cum longitudinem alicujus

rei, quanta sit, metimur. Ut, si C D sit margo panni, papyri vel fenestrae, et quaeratur, an ille forte cubitum longus sit: sumimus mensuram cubitalem A B, eamque applicamus rei metiendae sic, ut et mensurae extremum A rei extremo C imponatur, et mensurae acies A B rei marginem C D stringat; quo facto aut mensurae alter terminus B in ipsum marginis finem D incidet, aut supra illum prominebit, aut intra ipsum subsistet; et notum est, quid in uno quoque horum judicemus: de quo mox.

§. 3.

Casus I. Quod si primum illud contingat, ut recta uno suo extremo ad alterius rectae extremum et secundum ipsius directionem applicata, reliquo etiam extremo suo in illius reliquum extremum incidat, adeoque iidem sint utriusque fines, et neutra ultra alterum promineat, procurrat, excedat: eae duae rectae aequales erunt, neutra altera major aut minor, longior aut brevior. Ut si rectae A B extremo suo A ad extremum C et secundum directionem rectae C D applicatae extremum quoque B in extremum D cadat; aequales erunt rectae A B, C D.

Fig. 3.

Quum autem recta A B rectae C D eo, quo diximus, modo superposita est, nempe ut et punctum A in punctum C, et ipsa A B in directionem C D, et punctum B in punctum D incidat; tum congruere dicitur recta A B rectae C D. Brevius itaque dicta sic comprehendere licet: si recta linea alteri rectae lineae congruit (vel sic superimponi potest, ut congruat); ipsi aequalis erit.

De rectis igitur lineis separatim hic pronuntiatur, quod in universum valet de omnibus, quae extensa sunt et magnitudinem habent: nempe ut ea, quae congruant, aequalia sint. *Τα εφαρμοζοντα αλληλοις, ισα εσιν*: quod Axioma est Euclidis 8vum. Nam ut recta linea rectae lineae congruit, si eae secundum totam extensionem suam coincidunt, ut neutra alteram uspiam, neque in terminis suis, neque inter ipsos, excedat aut transgrediatur aut praetereat aut promineat: sic et angulus rectilineus angulo rectilineo congruere dicitur, cum unus ita alteri applicatus est, ut, quae ipsos comprehendunt rectae lineae, duae duabus, altera alteri, tum in puncto, in quo se invicem tangunt vel concurrunt, tum in reliqua utriusque directione coincidant: et triangulum rectilineum triangulo rectilineo congruet, quorum unum alteri sic applicatum erit, ut nihil de altero supra alterum promineat, aut intra alterum retrocedat, sed lineae rectae, quibus continentur, singulae singulis, tum in extremis suis, tum inter ipsa, coincidant: et ita de aliis; ut in universum congruere ea dicantur, quorum termini coincidunt. Quae autem ita congruunt, aequalia inter se communi sensu judicantur: eoque judicio uti solemus, cum longitudinem aliquam decempeda, mensura cubitali vel pedali et similibus metimur: idemque in spatiis tum planis tum solidis locum habet.

§. 4.

Cas. II. Si vero alterum eorum, quae §. 2. diximus, contingat, ut scilicet superposita recta inde a communi termino ulterius quam jacens recta protendatur, sive alterum ipsius extremum ultra alterum

jacentis extremum in communi directione cadat; major erit ea, quae superposita est, quam altera subjacens.

Fig. 4. Ut si puncto A ad punctum C, et recta A B ad rectam C D applicata, punctum B ultra punctum D cadat, ut in E: erit A B major quam C D.

Constat enim hic superposita A B duabus partibus, una, quae cum subjacente C D congruit. eique adeo (per dicta §. 3. seu per Axioma 8vum) aequalis est; et altera, quae extra subjacentem cadit, et cum recta inter puncta D et E interjecta congruit: hujus ergo rectae D E longitudine recta A B, superat rectam C D.

Seu per Axioma Euclidis 9num, totum majus est sua parte. Ergo superposita A B major erit ea sui parte, quae cum subjacente C D congruit. Sed haec pars ipsi subjacenti C D aequalis est (per Ax. 8.). Ergo superposita A B subjacente C D ipsa major est; per Axioma: quod, si magnitudo sit major altera, et haec altera aequalis tertiae; prima quoque major erit quam tertia: quod est quasi Corollarium Axiomatis 1mi Euclidis.

§. 5.

Cas. III. Si denique tertium eorum, quae §. 2. dicta sunt, contingat, ut scilicet recta superposita inde a communi extremo non eo usque, quo subjacens recta, pertingat, sed citerius subsistat, sive alterum illius extremum citra hujus alterum extremum in communi directione cadat: minor erit superposita quam subjacens.

Fig. 5. Ut si rectae A B puncto A ipsi C superposito, et recta A B in directionem rectae C D posita, punctum B citra punctum D cadat, ut in F: erit A B minor C D.

Hic enim superposita A B parti tantum subjacentis C D, parti inquam C F, congruit: huic igitur parti aequalis est (per Ax. 9.): ergo tota C D minor est.

Seu recta C D constat duabus partibus, una C F, cui recta A B congruit, adeoque aequalis est; altera F D, cujus longitudo est id ipsum, quo C D superat rectam C F vel A B, seu quo A B minor est quam C D.

§. 6.

Hisce stabilitis, sequitur, ut alia tria proponamus, quae trium praecedentium conversa sunt.

Conversum I. Si duae rectae lineae aequales sint: earum una ad alteram translata sic, ut uno suo extremo unum hujus extremum tangat, et ipsa in hujus directionem cadat; alterum quoque ipsius extremum in alterum hujus extremum incidet; ut ita tota cum tota congruat. Breviter: Duae rectae lineae inter se aequales congruere possunt.

Ut, si recta A B rectae C D aequalis sit, et illius extremum A hujus extremo C superponatur, et ipsa A B secundum directionem C D ponatur: extremum quoque B in extremum D incidet; adeoque tota A B toti C D congruet. *Fig. 3.*

Si enim punctum B non cadat in punctum D: aut ultra cadet, aut citra. Nec vero ultra cadere potest; quia alioqui superposita A B major foret subjacente C D (per §. 4); quod non est. Neque etiam citra cadere potest; quia alioqui superposita A B minor foret subjacente C D (per §. 5.); quod non est. Ergo punctum B in ipsum punctum D cadit.

§. 7.

Conversum II. Si duae rectae lineae inaequales sint; earum si major minori superponitur sic,

ut et extremo suo uno unum hujus extremum tangat, et ipsa in hujus directionem cadat: alterum illius extremum ultra alterum hujus extremum cadet, seu in punctum aliquod hujus ultra alterum extremum productae incidet.

Fig. 4. Ut si A B recta sit major C D, et punctum A in punctum C, et recta A B secundum directionem C D ponatur; cadet punctum B ultra punctum D, seu in punctum aliquod rectae C D ultra D productae.

Ostenditur similiter ac praecedens. Si enim punctum B non cadat ultra punctum D: aut in ipsum punctum D cadet; aut citra D, hoc est, inter C et D. Non vero potest in ipsum punctum D cadere: quia alioqui recta A B rectae C D aequalis foret (per §. 3. seu per Ax. 8.): quod non est. Neque etiam citra punctum D cadere potest: quum alioqui recta A B minor foret recta C D (per §. 5.): quod non est. Ergo punctum B ultra punctum D, hoc est, in punctum aliquod rectae C D ultra D productae cadet.

§. 8.

Conversum III. Si duae rectae lineae inaequales sint, et earum minor ad majorem sic applicetur, ut et uno suo extremo unum hujus extremum tangat, et ipsa in hujus directionem cadat: reliquum illius extremum intra hanc cadet, seu citra reliquum hujus extremum, sive inter duo hujus extrema cadet.

Fig. 5. Ut si A B recta minor sit C D, et punctum A in punctum C ponatur, et ipsa A B ad rectam C D applicetur: dico, punctum B intra rectam C D, sive citra punctum D, seu inter extrema C et D cadere.

Nam si punctum B in ipsum punctum D caderet; esset recta A B aequalis rectae C D (per Ax. 9.); sin ultra D; esset minor (§. 5.): quorum neutrum est. Ergo punctum B nec in ipsum punctum D, nec ultra ipsum cadit: itaque citra ipsum cadat necesse est; quod erat ostendendum.

II. Praeliminaria de angulorum rectilineorum ad se invicem applicatione.

§. 9.

Si sint duo anguli rectilinei, hoc est, a binis rectis lineis concurrentibus seu se invicem tangentibus facti quicumque (sive in eodem plano siti, sive in diversis; et sive rectae utrumque comprehendentes omnino a se invicem sejunctae sint, sive aliquid habeant commune; ut si una earum, quae unum angulum, cum una earum, quae alterum comprehendunt, ex parte coincidat; aut si punctum saltim aliquod commune habeant, quod et ipsum esse punctum, in quo rectae concurrentes angulum efficiunt, seu qui anguli vertex est, potest): intelligatur unus eorum angulorum ad alterum ita mente atque cogitatione transferri, ut et uterque in eodem jam plano, si forte antea non fuerit, situs sit, et vertex prioris anguli in posterioris anguli verticem cadat, et una, quam velis, rectarum priorem angulum comprehendentium super unam assignatam rectarum posteriorem comprehendentium cadat, et simul angulus prior angulo posteriori super-

jaceat; quod quidem requirit, ut simul reliqua priorum rectarum ad easdem, ad quas reliqua posteriorum jacet, rectae assignatae, quam diximus, partes cadat.

Ut, si sint duo anguli rectilinei B A C, E D F: intelligamus angulum B A C ita transferri ad angulum E D F, ut et punctum A, qui est vertex prioris, in punctum D, qui est vertex posterioris, cadat; et una, quam velis, rectarum priorem comprehendentium in unam assignatam rectarum posteriorem comprehendentium, puta in rectam D E, cadat, et simul angulus B A C super angulum E D F cadat: quod quidem hanc vim habet, ut, si recta quidem A B in rectam D E ceciderit, simul recta A C ad eas rectae D E partes, ad quas est D F, cadat; si vero recta A C in rectam D E cadat, simul recta A B ad easdem rectae D E, ad quas est D F, partes cadat. *Fig. 6.*

Hoc rursus postulatur ab iis, qui ad primi theorematis Elementorum demonstrationem animum applicare velint, ut mente et cogitatione concipiant. Nam sicut lineam rectam lineae rectae superponi posse concipimus; sic et planum aliquod vel plani partem, planam figuram, planum angulum in aliud planum posse transferri. Tum vero ubi duo fuerint anguli rectilinei B A C, E D F in uno eodemque plano, sive omnino ab se invicem sejuncti, sive etiam commune aliquid in rectis comprehendentibus habentes: eorum unum B A C poterimus promovendo, si placet, vel trahendo, ita ut ex illo plano non exeat, ad alterum E D F, quem manentem suo loco relinquimus, ita transferre et accommodare, ut prioris vertex A in posterioris verticem D, et una rectarum priorem comprehendentium

secundum unam rectarum posteriorem comprehendentium assignatam D E cadat, et simul angulus super angulum cadat; una, inquam, sed non, utram velis, sed sola A B in figura exposita. In altera A C enim id fieri non poterit solo illo anguli B A C motu in plano subjecto peragendo, sed accedere oportebit conversionem anguli B A C vel gyrationem extra planum subjectum faciendam, qua rectae ipsum comprehendentes inversum quendam in subjecto plano situm nanciscantur. De quo postea dicemus in Excursu ad hanc §. Hic postulare sufficiat id, quod nemo facile erit, quin concipi posse cogitatione assequatur.

Quod autem latine dicimus a d e a s d e m p a r t e s, a d d i v e r s a s p a r t e s, a d a l t e r u t r a s p a r t e s; Graece vero *επι τα αυτα μερη*, *επι τα ἑτερα μερη*, *εφ ἑκατερα μερη* apud Euclidem in Elementorum Lib. I. Def. 35, Ax. 11, Prop. 7, Prop. 11ae constructione, Prop. 14, Prop. 33. et aliis dicitur: vernaculo sermone dicimus *an einerley Seite, an der andern Seite,* etc.: quod non alienum duximus tironum causa annotare.

§. 10.

Propositis ergo duobus angulis rectilineis quibuscumque, fiet id, quod fieri posse postulavimus, ut eorum unus alteri superponatur, vertice suo in hujus verticem, et una rectarum ipsum comprehendentium in unam rectarum hunc comprehendentium cadente: tunc reliquam priorum quod attinet, quomodo ipsa casura sit, tria poterunt contingere. Nam aut in reliquam posteriorum incidet, aut ultra ipsam, aut citra cadet. Vel, quod perinde est; angulus superpositus aut subjacenti congruet, aut eum excedet seu supra

eum prominebit, aut deficiet et partem hujus aliquam prominentem relinquet.

Fig. 6. Ut si angulus B A C angulo E D F superponitur sic, ut vertex A in verticem D, et recta A B in rectam D E cadat: tunc recta A C aut in ipsam rectam D F cadet, ut angulus B A C cum angulo E D F congruat; aut ultra D F cadet, ut prior angulus excedat angulum E D F, et supra ipsum parte aliqua sui promineat; aut denique citra rectam D F cadet, ut prior angulus posteriori non toti congruat, sed parti tantum ejus congruat, partem aliam prominentem, et cui nihil superpositum sit, relinquat.

§. 11.

Casus I. Quod si primum contingat, ut vertice A in verticem D, et recta A B in rectam D E cadente, recta quoque A C in rectam D F cadat; ergo angulus B A C angulo E D F congruat: aequales erunt duo anguli B A C, E D F.

Quippe quod omnia, quae congruunt, aequalia sunt. *Τα εφαρμοζοντα αλληλοις, ισα εσι*, per Axioma 8vum.

Et notandum est, directionem hic tantum rectarum respici, magnitudinis nullam rationem haberi. Quam longae enim sint A B et D E, itemque A C et D F, nihil interest; et sive aequalis sit superposita subjacenti, sive longior, sive brevior, perinde est: modo recta A B in directionem D E, et A C in directionem D F cadant, anguli congruunt. Nec, si alterutra ex illis, sive superposita sive subjacens, augeatur longitudine aut minuatur, magis minusve congruent anguli; nec aequales esse desinent. Non augetur angulus augenda rectarum ipsum comprehendentium magnitudine, nec

minuenda minuitur: at vero manente rectarum longitudine, augeri vel minui potest angulus, si earum alterutrius aut utriusque positio mutetur. Hinc ubi de angulo judicandum est, nec necesse est nec quicquam prodest, rectas ipsum comprehendentes finitas esse: sufficit directionem haberi, quà protendantur: quousque protendantur, nihil ad rem facit.

§. 12.

Casus II. Si rursus vertice A in verticem D, et recta A B in rectam D E cadente, contingat alterum, ut recta A C ultra rectam D F cadat, seu quod idem est, extra angulum E D F ad partes D F: major erit angulus B A C angulo E D F. *Fig. 7.*

Hic enim pars anguli B A C congruet angulo E D F, adeoque huic aequalis erit (§. 11.); totus ergo B A C major erit angulo E D F. Ut si A C cadat in directionem D G; angulus B A C angulo E D G congruit, huic igitur aequalis est (§. 11.); angulo ergo E D F, qui est pars anguli E D G, major est.

§. 13.

Cas. III. Si denique, positis iisdem, quae prius, tertium accidat, ut recta A C cadat citra rectam D F seu intra angulum E D F: minor erit angulus B A C angulo E D F. *Fig. 8.*

Congruet enim cum parte anguli E D F; huic igitur parti aequalis erit; ergo toto minor. Ut si A C cadat in directionem D H; congruet igitur angulus B A C angulo E D H, aequalis ergo erit angulo E D H, ergo minor toto E D F.

§. 14.

Generatim igitur, si angulus rectilineus angulo rectilineo superponatur sic, ut vertex illius in hujus verticem, et una rectarum priorem comprehendentium in unam rectarum posteriorem comprehendentium cadat: si quidem etiam reliqua in reliquam cadet, anguli aequales erunt. Sin autem reliqua priorum ultra reliquam posteriorum cadet; prior angulus major erit posteriori: si vero citra; minor.

Huic propositioni et tribus ejus partibus respondet sequens conversa, et ipsa tribus constans partibus.

Si duorum angulorum rectilineorum unus alteri superponatur sic, ut et vertex in verticem, et una rectarum priorem comprehendentium in unam rectarum posteriorem comprehendentium cadat: si quidem anguli fuerint aequales; reliqua quoque priorum in reliquam posteriorum rectarum cadet. Si vero major sit is, qui superponitur; reliqua priorum rectarum ultra reliquam posteriorum cadet; sin minor, citra.

§. 15.

Pars I. Sint enim duo anguli rectilinei B A C, E D F inter se aequales; et superposito angulo B A C ipsi E D F sic, ut punctum A in punctum D, et recta A B in rectam D E cadat: dico etiam rectam A C in rectam D F cadere.

Non enim ultra D F cadere potest: alioquin angulus B A C major foret angulo E D F (§. 12.); quod non est. Nec citra D F: alioquin angulus B A C minor foret angulo E D F (§. 13.): quod item non est. Ergo in ipsam D F cadet.

Breviter ergo: Angulorum duorum rectilineorum aequalium unus alteri potest congruere. Itaque quod Axioma 8vum dicit, ea, quae congruunt, aequalia esse, id ut in lineis rectis, sic et in angulis rectilineis conversum quoque verum est; nempe ut rectae lineae aequales, itemque anguli rectilinei aequales congruant; hoc est, ita superponi alterum alteri possit, ut congruant.

§. 16.

Pars II. Sint duo anguli rectilinei B A C, E D F, inaequales, quorum major sit B A C. Superposito angulo B A C ipsi E D F sic, ut punctum A in punctum D, et recta A B in rectam D E cadat: dico rectam A C ultra rectam D F cadere.

Si enim recta A C non cadat ultra D F: aut in ipsam cadet, aut citra ipsam. Sed in ipsam cadere non potest: foret enim ita angulus B A C angulo E D F aequalis (§. 11.): quod non est; ergo non in ipsam cadet. Sed nec citra ipsam: foret enim ita angulus B A C angulo E D F minor (§. 13.); quod non est: ergo non citra ipsam D F cadet recta A C. Et ostensum est, nec in ipsam cadere posse: ergo ultra ipsam D F cadet recta A C; quod ostendendum erat.

§. 17.

Pars III. Sint denique duo anguli rectilinei B A C, E D F rursus inaequales, et eorum minor sit B A C. Superposito angulo B A C ipsi E D F sic, ut punctum A in punctum D, et recta A B in rectam D E cadat: dico rectam A C citra rectam D F cadere.

Similiter ostenditur ut praecedens. Nec enim in ipsam D F, nec ultra ipsam cadere potest: cum priori quidem casu angulus B A C aequalis foret angulo E D F, posteriori vero major (§. 11. 12.): quorum neutrum est. Ergo quum nec in ipsam, nec ultra ipsam cadat; citra ipsam cadat necesse est.

III. Praeliminaria de trianguli super triangulum superpositione.

§. 18.

Postquam de rectae lineae super rectam lineam superpositione, et de anguli rectilinei super angulum rectilineum superpositione diximus: de trianguli rectilinei super triangulum rectilineum superpositione dicendum est. Ad quam vix opus erit peculiari postulato; sed illud, quod de angulis proposuimus (§. 9.), sufficiet. Vel etiam hujus ipsius loco poterit simplicius quodammodo poni hoc:

Si recta linea ex altera saltim parte terminata sit in plano aliquo, et sit angulus rectilineus quicumque sive in eodem plano sive in diverso: hunc angulum illi rectae posse sic in illo plano superponi, ut et anguli vertex in assignatum illius rectae extremum, et designatum anguli crus secundum ipsam rectam cadat, et simul reliquum crus ad assignatas illius rectae partes cadat.

Fig. 9. Ut, si sit angulus rectilineus quicumque B A C, eum posse rectae D E in plano aliquo sitae et in puncto D terminatae sic superponi,

ut punctum A in punctum D, et recta A B secundum rectam D E cadat, et simul recta A C, ad quas velis rectae D E partes, cadat.

§. 19.

Ex quo porro consequetur:

Si sit recta linea in plano ex una saltim parte terminata, et triangulum sive in eodem sive in alio plano: posse hoc triangulum illi rectae lineae in plano, in quo ipsa est, ita applicari, ut assignatum trianguli latus et assignato uno extremo suo in assignatum illius rectae extremum, et directione sua in ipsam rectam cadat, et triangulum simul ad partes illius rectae assignatas cadat.

Ut, si sit triangulum A B C; poterit id rectae cuicumque D E in plano, in quo ipsa est, sic applicari, ut et punctum A in punctum D, et latus A B secundum rectam D E, et simul triangulum A B C ad partes rectae D E assignatas cadat. Fig. 10.

§. 20.

Itemque:

Si fuerint duo triangula, sive in eodem plano, sive in diversis sita: posse eorum unum alteri sic applicari, ut latus unius assignatum extremo suo uno extremum assignati lateris alterius tangat, et directione sua in hoc latus cadat, et ipsum triangulum ad easdem, ad quas alterum triangulum jacet, illius rectae partes cadat. Brevius, si placet, sic: Posse quodvis triangulum cuivis secundum assignatum latus et adjacentem angulum superimponi.

Fig. 11. Ut si sint duo triangula A B C, D E F: poterit triangulum A B C triangulo D E F sic applicari, ut et latus assignatum A B tam extremo suo A in extremum D lateris assignati D E, quam directione sua secundum hujus directionem cadat, et simul triangulum A B C ad easdem partes rectae D E, ad quas jacet triangulum D E F, cadat. Ac rursus, sic quoque, ut latus assignatum A B extremo suo A et directione sua in extremum D E et directionem lateris D F cadat, simulque triangulum A B C ad eas rectae D F partes, ad quas est triangulum D E F, cadat.

Hisce praestructis, veniamus nunc ad ipsam illam, quam tradit Euclides, quartae suae propositionis seu theorematis primi demonstrationem: cujus summam tantum et apices indicabimus; fusius enim explicata habetur a Savilio (in Chrestomathia geometrica, p. 181 — 190).

IV. *Propositionis quartae Elementorum demonstratio.*

§. 21.

Ponantur alicubi esse duo triangula, sive in eodem plano sive in diversis, quae habeant duo latera duobus lateribus, alterum alteri, aequalia, et angulum angulo aequalem, qui ab aequalibus lateribus comprehenditur. Talia igitur duo triangula ostenditur per omnia congruere posse: haec enim demonstrationis summa est; quae quomodo efficiatur, videbimus jam.

a) Primo enim, ubicumque sint illa duo triangula, et quomodocumque unum respectu alterius situm sit:

concipere possumus (§. 20.) unum eorum transferri ad alterum et ipsi applicari vel superimponi sic, ut latus illius, quod velis, lateri hujus, quod velis, et angulus uterlibet eorum, qui priori lateri adjacent, angulo utrilibet eorum, qui posteriori lateri adjacent, superincumbat: et eo facto totus superpositi trianguli situs determinatus erit sic, ut, reliqua ejus omnia quomodo casura sint, certam et necessariam ex facta superpositione consecutionem habeat.

Nominatim igitur latus unius dictorum triangulorum sumatur non quodvis de tribus, sed utrumvis de duobus illis, quae aequalia duobus alterius trianguli lateribus, alterum alteri, ponebantur; et angulorum duorum ei lateri adjacentium sumatur non uterlibet, sed is nominatim, qui angulo alterius trianguli aequalis ponebatur: illud igitur latus et ille angulus lateri aequali et angulo aequali alterius trianguli mente et cogitatione superponatur. Quibus ita factis, non jam liberum erit, reliqua sic vel aliter ponere; sed omnia per se sic cadent, ut necessitas rei postulat. Vide, quomodo.

Ut, si triangula A B C, D E F habeant duo latera B A, A C duobus lateribus E D, D F, alterum alteri, aequalia; latus quidem B A lateri E D, latus vero A C lateri D F; et angulum B A C angulo E D F aequalem, qui comprehenditur ab aequalibus lateribus. Transferatur triangulum A B C ad triangulum D E F, et ei superponatur sic, ut punctum A puncto D (quae puncta sunt vertices aequalium angulorum), et latus A B (quod est unum eorum, quae lateribus alterius trianguli, alterum alteri, aequalia sunt) lateri D E, quod illi aequale est, superjaceat. *Fig. 12.*

Cum autem diximus triangulum triangulo superimponendum; eo ipso jam involvitur, ut, ceteris ita, ut diximus, factis, angulus B A C angulo E D F superjaceat, seu ut A C ad easdem, ad quas est D F, rectae D E partes cadat. Nunc reliqua sponte cadent: quaeritur ergo, quorsum casurum sit punctum B respectu puncti E; quorsum recta A C respectu rectae D F?

b) Si latus superpositum lateri subjacenti aequale non esset; etsi suo extremo hujus extremum tangat; tamen non congrueret, sed alterum illius extremum alio, quam in reliquum hujus extremum, sive ultra sive citra, caderet. Nunc, cum aequale sit, congruet; hoc est, alterum quoque illius extremum in alterum hujus extremum cadet. (per §. 6.)

Ad figuram: Posito A super D, et recta A B in directionem rectae D E; quoniam rectae A B, D E aequales sunt (tales enim sumtae vel suppositae erant); etiam punctum B in punctum E incidet. Quippe, ut supra notatum, quae aequales sunt rectae, eas etiam congruere posse necesse est (§. 6.): ergo recta A B rectae D E, cui aequalis est, congruet quoque; quod nihil aliud sibi vult, puncto A in D et recta A B secundum D E jacente, quam ut punctum B in punctum E cadat.

c) Rursus si angulus is, qui sumtus est, vel qui ad sumtum extremum, quo latus lateri applicatum est, adjacet, non aequalis esset ei, cui superpositus est: reliquum laterum illum angulum comprehendentium aliter caderet quam secundum reliquum laterum hunc angulum comprehendentium; nempe aut ultra aut citra hoc; vel, si ita placet, sursum aut deorsum; vel dextrorsum aut sinistrorsum; vel extra ipsum ad alter-

utras ipsius partes. Nunc cum aequalis sit dictus angulus dicto angulo; congruet quoque (per §. 15.); hoc est, reliquum latus in reliquum incidet.

Ad figuram: Jacente puncto A in puncto D et recta A B secundum rectae D E directionem; quum per hypothesin seu suppositum, sit angulus B A C angulo E D F aequalis; recta quoque A C in rectam D F incidet, non aliter, non ab illa diverget hinc vel inde; non extra angulum E D F, non intra ipsum cadet (per §. 15.): quoniam, si aliter caderet, angulus B A C angulo E D F aequalis non foret, ut supra ostensum est.

d) Sed etsi incidat: nondum tamen ob id ipsum etiam congruit. Et revera non congrueret, atque ita triangulum triangulo non congrueret, si non etiam ipsum hoc alterum latus alteri lateri aequale esset. At vero aequale est ex hypothesi: ergo et cum ipso congruit, hoc est, alterum quoque extremum in alterum incidit. (§. 6.)

Ad figuram: Jacente puncto A in puncto D, et recta A B secundum rectam D E, et recta A C secundum rectam D F; nondum statim sequeretur, ut punctum quoque C in punctum F incideret, nisi A C recta rectae D F aequalis esset. Nunc cum aequalis sit (talis enim sumta et posita est); punctum quoque C in punctum F cadat necesse est: nam si ultra citrave caderet, aequalis non esset recta A C rectae D F, ut supra ostensum. (§. 6.)

e) Quae cum ita sint; quid deest, quo minus omnia omnibus congruant? Cum enim ostensum sit, facta unius lateris super unum latus, et anguli super angulum impositione, sic uti dictum est, utrumque làtus utrique (eorum dico, quae dictum angulum com-

prehendunt) prorsus congruere, ita ut non modo directiones, sed etiam reliqua extrema coincidant; sed haec reliqua dictorum laterum extrema sint eadem et puncta, inter quae basis continetur, ut in uno, sic in altero triangulo: fieri aliter non poterit, quam ut basis quoque cum basi congruat. Nisi forte dixeris, posse basin unam atque alteram, etsi inter eadem extrema contineantur, tamen in intermedia extensione a se invicem deflectere, ita ut spatium inter se aliquod relinquant. Quod quidem, si neutra aut saltim non utraque basis linea recta esset, fieri omnino posset: nunc vero cum utraque sit linea recta, fieri prorsus nequit: spatium enim comprehendere duae rectae lineae non possunt, quod est expressum inter Axiomata Euclidis XIImum. Ergo necessario basis quoque cum basi congruet.

Ad figuram: Superposito triangulo A B C ipsi D E F sic, ut A super D, et A B super D E caderet; postquam et punctum B in E, et punctum C in F cadere ostensum est (*b* et *d*): sequitur, ut et recta B C rectae E F congruat. Si enim non congrueret, sed extrema duo cum illa communia habent, in intermedio suo cursu ab illa discreparet; fieret, ut aliquid inter ipsas spatii interjectum alicubi existeret: (nam si nullum; quid hoc est aliter, quam coincidere?) Id vero fieri nequit in lineis rectis; quarum non possunt duae spatium aliquod comprehendere. Ergo non fieri potest, ut recta B C cum recta E F non congruat.

f) Basin ostendimus basi congruere. Sed quae congruunt inter se, sive rectae lineae sive alia quaecumque, aequalia sunt. Ergo basis basi aequalis est.

Ad figuram: Basis B C basi E F quum congruat, aequalis est.

Atque hoc primum inventum est ex iis, quae per hypothesin aequalia sunt; consequens nempe ut basis quoque basi aequalis sit.

g) Et jam totum etiam triangulum cum toto congruere patet: ergo ipsi aequale est per rationem modo dictam. Quod est alterum consequens.

Ad figuram nempe: triangulum A B C triangulo D E F. Sensus est: spatium, quod a tribus rectis A B, B C, C A comprehenditur, nec majus nec minus, sed ejusdem magnitudinis esse ac spatium illud, quod a tribus rectis D E, E F, F D comprehenditur.

h) Et reliqui anguli reliquis, alter alteri, congruunt: ergo per eandem rationem aequales sunt, non uterque utrique, sed alter alteri. Sed quaeritur: qui quibus? ut ait Savilius (Chrestom. geom. p. 184.); vel potius, uter utri? Oportet enim hoc quoque notionibus et verbis generatim ita distinguere, ut ambiguitati non sit locus; ne postea, cum ad applicandum theorema venietur, aut error committatur in sumendis iis angulis, quos invicem aequales pronunties, aut saltim haesitetur, deficiente nota, per quam dignosci possint. Itaque operae pretium erat, hanc notam adjungere. Quam sic verbis comprehendit Elementorum auctor, ut dicat, reliquorum angulorum (qui duo sunt in utroque triangulo: tres enim angulos habet utrumque triangulum; sed horum positus est unus uni aequalis; restant ergo duo) reliquorum igitur angulorum eos aequales esse, alterum alteri, quos aequalia latera subtendant, seu qui aequalibus lateribus opponantur. Quod quidem sufficit ad tollendam omnem ambiguitatem, et sufficientem praebet notam ad dignoscendos eos, quos aequales dicere oporteat. Sumatur enim

unum dictorum laterum in uno triangulo, et latus ipsi per hypothesin aequale in altero; et habet prius latus angulum, quem subtendit, in suo triangulo; ut et posterius latus angulum: hic igitur angulus huic angulo aequalis est. Et par ratio est reliqui anguli, qui reliquo aequalis erit: nempe quem reliquum latus in uno, quemque aequale latus in altero triangulo subtendit. Has duas aequalitates complectitur Euclides, cum dicit, angulos reliquos angulis reliquis, alterum alteri, aequales esse. Quod est tertium, et simul, si ita velis, quartum consequens.

Ad figuram: Angulus A B C angulo D E F congruit, ergo aequalis est: et angulus A C B angulo D F E congruit, ergo aequalis est. Jam angulos A B C, D E F subtendunt latera A C, D F, quae aequalia ponebantur: itemque angulos A C B, D F E subtendunt latera A B, D E, quae item aequalia ponebantur. Cumque fuerit angulus B A C angulo E D F aequalis ex hypothesi, reliqui ergo sint anguli quidem A B C, A C B in uno, anguli vero E D F, E F D in altero triangulo: dicimus ergo reliquos angulos reliquis, alterum alteri, aequales esse, eos quidem, quos aequalia latera subtendunt.

ι) Haec igitur ostensa sunt de duobus triangulis duo latera duobus lateribus, alterum scilicet alteri, aequalia, et angulum angulo aequalem habentibus eum, qui aequalibus lateribus comprehenditur; haec, inquam, ut summam rei verbis complectamur, ostensa sunt, ea et basin basi aequalem habere, et tota triangula inter se aequalia esse, et reliquos angulos reliquis angulis aequales habere, alterum alteri, quos quidem aequalia latera subtendunt. Quae est Euclidis

propositio quarta, theorema primum; quod ad universam Geometriam aperit aditum.

§. 22.

Hujus enuntiationem Euclides sic verbis complexus est, ut ad sensum nihil neque desit neque redundet; nihil ambigue dictum, nihil obscurum sit; ut, si forte rem eandem aliis verbis enuntiare liceat, melius certe non liceat. Ceterum quomodo aliter enuntiari possit haec propositio aut ejus aliquae partes, videbimus in Capite proximo (§. 82 — 88.).

§. 23.

Multiplex autem hujus theorematis et frequentissimus non in iis modo, quae proxime sequuntur et ex hoc solo demostrantur, sed etiam ulterius per omnem geometriam usus est. Et ut in diversis quidem planis sita sint duo talia triangula, usu venit in prop. 4ta Libri XImi, aliisque Libri XI et XII. propositionibus. Ubi autem in eodem plano sita sunt, magnae rursus situs varietates locum habere possunt, atque inde magna applicationum hujus theorematis multitudo ac varietas; quam Capite secundo persequemur.

§. 24.

Et notetur hic obiter ad Librum primum Elementorum; quemadmodum ejus propositio 4ta de binis triangulis non modo talibus, quae in eodem plano, sed et quae in diversis planis sita sint, intelligenda sit; ita idem locum habere in ejus propp. 8va, 24a, 25a, 26a.

Excursus ad §. 9. *(quem novitii praetereant) de superpositione anguli super angulum.*

Quaeri potest de lege, qua dijudicetur: propositis in plano duobus angulis rectilineis B A C, E D F si angulus B A C ad angulum E D F transferatur motu in ipso tantum plano peragendo, non extra illud egrediente; utrum, puncto A in punctum D, et recta A B ad rectam D E sic translata, ut in ejus directionem cadat, recta A C ad easdem, ad quas est D F, an ad diversas rectae D E partes casura sit; seu utrum angulus B A C super angulum E D F, an extra ipsum casurus sit. Quod ad judicandum haec praemittimus:

Fig. 13.

Si recta aliqua in plano circa punctum fixum gyretur; id secundum unam aut alteram duarum plagarum contrariarum fieri potest. Et in utravis earum gyrationum, qui motus dicti fiunt ab situ antecedente quocumque ad situm consequentem quemcumque, ii secundum eandem plagam omnes fieri dicuntur: ad contrariam vero huic plagam dicuntur fieri motus ab antecedente quocumque in altera gyratione situ ad consequentem quemcumque. Ut in figura subjecta, recta A B circa punctum fixum A revolvens aut in situm A C, A D veniet, ac deinceps situs A E, A F, A G, percurret, et postremo ad eum, unde incepit, situm A B redibit; aut inverso ordine primum in situm A G veniet, ac deinceps situs A F, A E, A D, A C percurret, et sic ad primum situm A B revertetur. Motus igitur priores ab situ A B ad A C

Fig. 14.

per angulum B A C, ab A C ad A D per angulum C A D. et sic porro ab A D ad A E, ad A F etc. omnes secundum eandem plagam fieri dicentur: secundum contrariam vero plagam motus, quo statim initio gyrationis ab situ A B per angulum B A G pervenitur ad A G, vel ab A G ad A F, etc.

His praemissis; sint anguli duo B A C, E D F, de quibus quaeratur id, quod supra dictum est. Rectae D E per A ducatur A e ipsi D E parallela, sic ut extrema e, E sint ad easdem partes (sensu, quo Euclides hac denominatione utitur in enuntiatione propositionis 33ae Imi): ducatur et alia recta O O iisdem parallela, cujus ad easdem partes sint duo puncta A et D, et quae ad easdem rectae D E partes, ad quas est D F, jaceat: tum e puncto A ducatur recta quaecumque A f ad easdem ipsius A e partes, ad quas est recta O O. *Fig. 15.*

His factis; si (fig. a) motus gyratorius ab situ A B in situm A C per angulum B A C tendit ad eandem plagam, ad quam motus ab A e ad A f per angulum e A f: tum translato angulo B A C ad angulum E D F motu, qui totus in subjecto plano peragitur, ita ut punctum A super D, et recta A B secundum rectam D E cadat; recta A C ad easdem, ad quas est D F, partes ipsius D E cadet, seu angulus B A C super angulum E D F cadet. Si vero (fig. b.) motus gyratorius ab A B ad A C per angulum B A C fiat ad contrariam plagam ei, ad quam fit motus ex A e ad A f per angulum e A f: tum angulo B A C ad angulum E D F translato, et puncto A super D, et recta A B super D E applicata, recta A C ad alteras ipsius D E partes, quam ad quas est D F, cadet, seu angulus B A C extra an-

gulum E D F, ad alteras rectae D E partes, cadet: et hinc, si velis eum super angulum E D F cadere, oportebit praeter eum, qui in plano subjecto fit, motum, planum anguli B A C circa rectam A B ut axem fixum convertere, donec ad alteras partes in subjectum planum recidat.

Fig. 16. Et habet haec duorum casuum distinctio usum ulteriorem in stereometricis: veluti cum in eodem plano sunt anguli B A C, E D F aequales, et ei plano ad easdem ipsius partes insistant in punctis A et D rectae A G, D H facientes angulum G A B aequalem angulo H D E, et angulum G A C angulo H D F. Hic si angulus B A C angulo E D F superimponatur, sic ut A B quidem super ipsam D E, A C vero super D F cadat: priori duorum, de quibus egimus, Casuum (fig. a.) recta A G ad easdem plani subjecti partes, ad quas est D H, cadet, et super ipsam D H cadet, et angulus solidus ad A angulo solido ad D congruet: posteriori vero casu recta A G ad diversas plani subjecti partes, quam ad quas est D H, cadet, et angulus solidus ad A angulo solido ad D non congruet, sed erit ei symmetricus, denominatione ea, qua cel. Le Gendre in hac re utitur.

CAPUT II.

Theoremata per immediatam propositionis quartae seu theorematis primi Elementorum applicationem provenientia.

§. 25.

Recepta vulgo sententia est de omni hac, quae Elementis Euclidis traditur, disciplina, eam satis in se ipsa lucis habere, ut non opus sit aliunde claritatem arcessere, cum ad intelligenda sequentia omnia nihil amplius discenti necesse sit, quam ut antecedentia probe habeat perspecta. Et in primo quidem Elementorum Libro, ut de hoc solo hic loquamur, certum est: si modo iis demonstrationibus, quas textus graecus, qualem nunc habemus, exhibet, subinde aliquid medelae aut opis adhibeatur, quomodo id faciendum passim ostenderunt viri eruditi, in quibus praeter antiquiores praecipue Rob. Simson et b. noster Pflei-

derer nominandi sunt, tales esse illius Libri propositiones, ut ad priores quidem 28 astruendas, praeter eas, quae cuique earum subsequenti antecedunt, postulata et axiomata excepto 11mo reliqua sufficiant; 29a vero, et quae eam sequuntur, etiam axiomate 11mo indigeant; aliunde autem quicquam, quod non in antecedentibus ostensum sit, mutuari non sit necesse.

§. 26.

Quod cum ita sit, quid obstat, inquies, quo minus tyro geometriae, cum primum quartam propositionem perceptam habet, inde recta statim via ad quintam, sextam, et ad omnes deinceps consequentes Euclideo ordine perducatur? aut quis, cum pronum sit ad ulteriora progredi, in citerioribus detineri se malit, aut per tardas ambages circumduci? Id quidem opus non foret, si omnes parem mentis facultatem ad ratiociniorum vim assequendam afferrent: quibus enim ista facultas suppetit, eos recta et brevissima via ad ulteriora progredi consentaneum est. Nam et Neutonum legimus et Paschalium et alios forte quosdam propositionum Euclidis, prius fere quam legissent demonstrationes, veritatem et cum antecedentibus nexum suopte ingenio et primo fere intutu perspexisse. Sed illius generis rara sunt ingenia, ut omnia praeclara rara: tardioribus igitur et minus acutis ingeniis subsidia a methodo quaeruntur. Quidam enim, etiam cum propositionis sensum et demonstrationis vim rite perspexerunt, memoria minus promta utuntur ad eam retinendam; aut, cum ad eam applicandam venitur, ubi aliquid variatum fuerit in situ, in reliquis figurae circumstantiis, haerent, et adesse in substrata figura ea

ipsa,

ipsa, quibus hypothesis propositionis prioris constabat, non statim pervident. Deinde si propositio aliqua ex antecedente non sic immediate profluat, ut sit ipsius merum, quod dicitur, corollarium; sed ad ejus conclusionem opus sit intermediarum aliquot argumentationum interventu: ad captum discentium non parum interest, utrum illarum intermediarum argumentationis partium parva et brevis sit series, an vero major et longior concatenatio; cum longior catena majorem attentionis vim et intentiorem tum ratiocinandi facultatem, tum haud scio an memoriae quoque contentionem desideret; ut, qui breviori gressui par sit, in longiori fortasse deficiat; aut cujus acies propinquiora assequatur, remotiora ejus obtutum fugiant. Praeterea a peritis in hoc genere passim observatum est, illam demonstrandi rationem, quae per deductionem ad impossibile procedit et indirecta dicitur, videri a consueto more paullo remotiorem, et peculiarem quandam novitiis offerre difficultatem.

§. 27.

Itaque ut celerrimus ille fiat et maxime compendiaria via discentis ab initiis ad ulteriora progressus; non id solum refert, ut sequentia ex antecedentibus bonis et legitimis deducantur ratiociniis; sed plurimum interest, qualis in discente sit ratiocinandi facultas. Quae ingenita quidem in universum est omnibus; sed potest naturalis facultas, ut in aliis, aut torpescere socordia, aut usu atque exercitatione corroborari. Quid autem potissimum ad usum atque exercitationem valeat in reliquis rebus, constat; nempe ut a minoribus et facilioribus fiat initium; postmodum, ubi in

his satis operae collocatum sit, ad majora ac difficiliora fiat progressio: hoc igitur methodi subsidio hic quoque utendum erit.

§. 28.

Quas enim memoravimus res (§. 26.) quae novitiis difficultatis aliquid habere possint; eae occurrunt in ipso hoc, qui in Elementorum limine faciendus est, a propositione 4ta ad 5tam, 6tam, 7mam, 8vam transitu. Quintam quidem quod attinet, ea paullo longiori et complicatiori syllogismorum nexu evincitur. Sexta habet demonstrationem indirectam; itemque septima et octava. Porro in applicanda quarta molestiam forte quandam inassuetae adhuc attentioni pariat longitudo consequentis, pluribus constantis partibus: in quo 8va propositio tractabilior ad applicationem videtur, quae etsi antecedens et ipsa habet, ut 4ta, tribus constans partibus, consequens tamen habet simplex. Multo etiam faciliores sunt hujus 8vae applicationes ad 9am, 11am, 12am demonstrandas, quam quartae ad 5am, 6am, 7am; cum in illis brevis et plana et directa sit argumentatio, in his longior, intricatior, ac partim indirecta. Quidni igitur exercitii tyronum gratia, priusquam illi ad 5tam et sequentes perducantur, offerantur iis faciliores quaedam 4tae applicationes, quales 8vae sunt in 9a, 11a, 12a?

§. 29.

Facilius autem ad ratiocinandi exercitium nihil inveniri potest, quam si ei, qui propositionem aliquam generalem perceptam habuerit, considerandi proponantur casus quidam speciales, qui non plus exigunt,

quam ut sub generale cognitum subsumantur. Hujus igitur generis erunt, quae in hoc Capite et proximo tradentur, theoremata, quae nihil aliud continent quam propositionem ıtam ad casus peculiares applicatam: ubi nempe eae, quae in hypothesi propositionis generalis ponuntur aequales rectae lineae, non modo aequales, sed una eademque recta linea sint; aut ubi in eadem recta linea sitae sint; aut ubi angulus, qui aequalis ponitur, idem et communis sit utrique triangulo; et id genus alia. Quorum quidem casuum magna est varietas, ut patebit ex sequentibus.

Ceterum generali plerumque enuntiatione propositiones complectemur, non contenti, in singulari tantum figura rem exponere, quamquam hoc brevius foret: sed illud non inutile erit et ipsum discentium ingeniis exercitium, si expressam verbis generalibus propositionem per se contemplentur, et quae sit ejus sententia in figura, quam idcirco delineaverint, eruant.

Quoniam autem in docendo expedit, viam aliquando contrariam ingredi; ut docens rem primo in figura singulari ostendat aut inveniendam proponat sine enuntiatione generali; tum tironi ad conficiendas denominationes et totam subinde enuntiationem generalem, ducem se et adjutorem praebeat, et pro cujusque ingenii captu tantum suppeditet, quantum ipsi opus sit ad efficiendam enuntiationem generalem: hujus quoque methodi exempla praebebimus. Nunc ad rem.

§. 30.

Primum autem inculcari vel tantum repeti ex iis, quae capite primo dicta sunt, oportebit: quemadmodum ad evincenda atque demonstranda ea, quae de

duobus triangulis habentibus ea, quae hypothesis propositionis quartae nominat, aequalia, proposita sunt, et iis adjuncta et consequentia esse asseruntur in illa quarta; omnino nihil interest, utrum illa duo triangula in uno plano sita sint an in diversis; sic non magis interesse, si ea in eodem plano sita fuerint, utrum a se invicem prorsus sejuncta jaceant, ut nulla ex parte alterum tangat alterum, nec ullam cum eo partem extensionis suae aut terminorum suorum communem habeat; an vero alicubi se tangant secundum punctum aliquod aut latus aut lateris partem; aut etiam angulum illum, de quo hypothesis dicit, non aequalem modo, sed etiam eundem et communem habeant; vel saltim latus unius et latus alterius trianguli in eadem recta linea jaceant; et quicumque alii possint esse προςδιορισμοι in eorum mutua positione. Nam utcumque inter se connexa atque complicata sint talibus modis ista bina triangula; tamen mente atque cogitatione divelli a se invicem possunt atque unum alteri superponi, sic ut tota congruant: in quo omnis vis demonstrationis traditae consistit.

§. 31.

Venimus itaque ad recensendas eas, quas perfunctorie indicavimus, varietates: ac primum

A) Habeant duo triangula unum quidem latus commune, alterum vero latus alteri aequale et angulum illis lateribus comprehensum aequalem: habeant vero

a) alterum latus et angulum dictum ad idem communis lateris extremum et ad diversas ejus partes.

Ad talia igitur duo triangula applicata propositio quarta ad sequentium enuntiationem Theorematum deducet.

§. 32.

Theorema I. Si duae rectae angulum comprehendentes sint aequales, et ex earum extremis ad extremum rectae illum angulum bifariam secantis ducantur duae rectae: eae inter se aequales erunt, et aequalia terminabunt triangula, et cum rectis aequalibus aequales facient angulos, itemque cum recta angulum bifariam secante. Fig. 17.

Sint enim duae rectae aequales A B, A C, comprehendentes angulum B A C, quem bifariam secet recta A D; et ab illarum extremis B, C ad hujus extremum D ducantur duae rectae B D, C D: dico rectas B D, C D inter se aequales esse; et terminare aequalia triangula A B D, A C D; et facere cum aequalibus rectis A B, A C aequales angulos A B D, A C D; itemque cum recta angulum B A C bifariam secante A D aequales angulos A D B, A D C.

Hoc enim per applicationem prop. 4tae immediate consequitur.

§. 33.

Sed hic de methodo docendi nonnulla annotare non alienum erit. Tradas igitur, si placet, tyroni propositionem generalem, sicut enuntiavimus, „Si duae rectae angulum comprehendentes“ etc: tum ille figuram delineet, et ad eam expositionem faciat ac determinationem (ἔκθεσιν et διορισμόν, eo sensu, quo Proclus haec usurpat; vid. Chrestomath. geometr. pag. 168. 170.); dein demonstrationem per prop. 4tam conficiat.

Haec methodus ut non improbanda videtur, utique si cum uno aliquo aut perpaucis discipulis res sit, quibuscum jugiter, prout res postulet, colloqui non sit difficile; sic plerumque in his doctrinae initiis, praesertim si plures fuerint discipuli, quorum attentionem retinere difficilius, anteponenda illi fuerit inversa quaedam methodus, ut ad suscitandam discentium *αυτοπραγιαν* et *εὑρετικὴν δυναμιν* conducibilior *); qua sic procedetur:

Proponatur primum in figura angulus B A C, comprehensus rectis A B, A C aequalibus, et is bifariam sectus sit recta terminata quantacumque A D. Jam ductis rectis B D, C D, jubeatur discipulus invenire, numquis propositionis 4tae Elementorum usus futurus, quid per eam eventurum sit?

Hic primum animadvertet, esse in figura subjecta duo triangula, quae habeant conditiones propositionis quartae, nempe duo latera duobus lateribus, alterum alteri, aequalia, et angulum angulo aequalem, qui ipsis comprehenditur. Quoniam enim A B, A C positae sunt aequales, communis autem A D; erunt ergo duo latera B A, A D duobus lateribus C A, A D, alterum alteri, aequalia: et quia angulus B A C bifa-

*) Hac methodo priori parte semestris hiberni 1822 — 23. cum discipulis in Seminario Schönthal, qui amplius 40 erant, aetatis 16 annorum, pleraque eorum, quae hoc Capite sequuntur, pertractavi vernaculo quidem sermone, lectione publica cum fructu, prout ingeniorum varietas ferebat, haud poenitendo. Quod eorum causa commemorare visum est, qui in iis, quae ad docendi methodum pertinent, experientiae, quod haud vituperandum est, potius credendum, quam fortuita opinionum commenta sequenda statuunt.

riam sectus ponebatur recta A D; angulus quoque B A D angulo C A D aequalis est; qui sunt illi ipsi, qui ab aequalibus positis lateribus comprehenduntur. Hinc jam locum habebunt consequentia, quae in propos. 4ta enumerata sunt; quorum primum est, ut sit basis basi aequalis, hoc est, B D aequalis D C; alterum, ut sit triangulum ABD triangulo ACD aequale; tertium, ut angulus A B D angulo A C D aequalis; hi enim subtenduntur latere communi A D; quartum, ut angulus A D B angulo A D C aequalis; nam et hi aequalibus lateribus A B, A C subtenduntur. Atque haec sunt omnia, quae per prop. 4tam in hac figura emergunt.

Jam demum jubeatur ea, quae ad figuram singularem invenit, notionibus et verbis generalibus complecti. Et primo quidem ad hypothesin enuntiandam, pro rectis A B, A C, et angulo BAC, nominabit duas rectas aequales, angulum comprehendentes; pro A D, rectam illum angulum bifariam secantem cujuscumque longitudinis. Ad primum consequens enuntiandum observabit, rectas B D, D C denominandas esse eas, quae ab extremis rectarum aequalium ad extremum rectae angulum bifariam secantis ducantur; has igitur aequales esse dicet; et sic habebit primam partem Theorematis generalis: „si fuerint duae rectae aequales comprehendentes angulum, et ex earum extremis ad extremum rectae illum angulum bifariam secantis ducantur duae rectae: eae inter se aequales erunt.“ Similiterque reliquae Theorematis partes seu reliqua consequentia generatim enuntiabuntur; quorum complexu existet illud ipsum, quod supra proposuimus, Theorema I.

§. 34.

Sed variationes saepe adhiberi possunt in denominatione, cum eadem res pluribus consideratur modis; unde et plures ad eandem figuram emergent theorematum formae. Ut in hac, si punctum D sumtum fuerit ultra rectam puncta B, C jungentem, considerari potest quadrilaterum A B D C, cujus duo contigua latera A B, A C sunt aequalia; A D vero diagonalis bifariam secat angulum illis lateribus comprehensum. Haec ad hypothesin. Jam ad consequens; erunt B D, D C reliqua latera; triangula A B D. A C D partes duae, in quas quadrilaterum a diagonali dividitur; angulus B D C is, qui priori B A C opponitur, cujus partes a diagonali factae sunt anguli B D A, C D A; anguli vero A B D, A C D sunt reliqui in quadrilatero anguli. His adhibitis denominationibus emerget hoc

Theorema II. Si in quadrilatero duo latera contigua sint aequalia, et angulus iis comprehensus bifariam sectus sit diagonali: duo reliqua latera aequalia erunt, et ex reliquis angulis duo sibi invicem oppositi aequales; praetereaque tam angulus, qui priori opponitur. quam totum quadrilaterum eadem diagonali bifariam secta erunt.

§. 35.

Eandem methodum in his, quae proxime sequuntur, adhibebimus: in quibus igitur non a theoremate, sed a quaestione incipiemus. Sit igitur

Quaestio prima:

Proposito triangulo aequicruri A B C, cujus scilicet aequalia crura sint A B, A C; si angulus B A C bifariam secetur linea recta: quid sit eventurum? *Fig. 18.*

Hic primo patet, tres casus posse distingui: aut enim illa recta ad basim B C usque, non amplius, pertinget; aut ultra eam continuabitur; aut citra eam et intra triangulum A B C terminabitur.

§. 36.

Casus I. Pertingat primum usque ad basim B C; sitque recta A D. Quaeritur igitur, numquis hic propositionis 4tae usus?

Quoniam A B aequalis est A C; duae ergo B A, A D duabus C A, A D aequales sunt, et angulus quoque B A D angulo C A D aequalis est, per hypothesin: per prop. 4tam igitur erit et 1) basis B D (trianguli B A D) basi C D (trianguli C A D) aequalis; et 2) triangula A B D, A C D aequalia; et 3) angulus A B D angulo A C D aequalis; et 4) angulus A D B angulo A D C aequalis; hi enim anguli sunt, quos aequalia subtendunt latera.

Jam ad denominationem; angulus B A C dicetur angulus ad verticem trianguli aequicruris A B C; B C basis, cujus segmenta a recta A D facta sunt B D, D C; porro sunt anguli A D B, A D C deinceps positi, quos recta insistens A D cum recta B C facit; qui ubi aequales sunt, recti dicuntur per Definitionem 10mam, et recta insistens A D dicitur ipsi B C perpendicularis. Tertium autem consequens, aequalitatem angulorum A B D, A C D, quod attinet; id merito hic omitti-

mus. quoniam illud a conditione, ut angulus B A C bifariam sectus sit, non pendet: nam et sine hac conditione adsunt illi anguli; et si aequales sunt, cum bifariam sectus fuerit ille angulus, aequales erunt etiam universim; quum bisectio illa semper fieri possit per sequentem Euclidis Propos. 9am Libri I. Reliqua autem sic enuntiabimus:

Theorema III. Si trianguli aequicruris angulum ad verticem bifariam secet recta occurrens basi: ea basin bifariam et ad angulos rectos secabit, et triangulum ipsum bifariam dividet.

§. 37.

Exercitii causa placeat, hic quoque rém alio modo considerare, et enuntiationis variationem afferre. Rerum enim et verborum, ut alias, sic in his quoque, is nexus est, ut conjunctum sit cogitandi de rebus et loquendi exercitium, et alterum alteri adjumento sit.

Intelligamus igitur figuram praecedentem sic ortam esse, ut ex eodem puncto A ad eandem rectam lineam B C, tres ductae sint rectae, duae exteriores A B, A C, una intermedia A D. Hypothesis erit, ut duae exteriores AB, AC aequales sint, et cum intermedia A D aequales faciant angulos: Consequens, ut intermedia A D priori rectae B C perpendicularis insistat, exteriores A B, A C ei sub angulis aequalibus insistant, et faciant segmenta B D, D C, intermediae utrinque adjacentia, aequalia. Ita erit

Theorema IV. Si ad rectam lineam ex eodem puncto tres rectae ductae sint, quarum duae exteriores inter se aequales sint et cum intermedia aequales faciant angulos: intermedia priori rectae perpendicula-

ris, duae exteriores sub aequalibus ipsi angulis insistent, et segmenta ejus, utrinque intermediae adjacentia, aequalia facient.

§. 38.

Casus II. Jam recta A D angulum B A C bifariam secans continuata sit ultra basim B C; sitque ejus extremum D. Quaeritur, ductis rectis B D, D C, quis usus propositionis 4tae? *Fig. 19.*

Consequitur rursus, ut basis B D basi D C aequalis sit, et triangulum A B D triangulo A C D, et angulus A B D angulo A C D, et angulus A D B angulo A D C.

Jam ad denominationem: puncta B, C dicentur extrema basis trianguli aequicruris A B C; angulus B A C ad verticem illius; punctum D extremum rectae illum angulum bifariam secantis et ultra basim productae; rectae D B, D C eae, quae hoc extremum cum extremis basis jungant; triangula A B D, A C D ea, quae illis rectis insistant verticem habentia eundem cum primo posito triangulo aequicruri; anguli D B A, D C A ii, quibus illae rectae ad crura trianguli aequicruris inclinentur; anguli A D B, A D C ii, quos eaedem rectae cum recta angulum bifariam secante faciant. Itaque erit

Theorema V. Si angulum ad verticem trianguli aequicruris bifariam secet recta ultra basin producta, et ex ejus extremo ad extrema basis ducantur duae rectae: eae inter se aequales erunt, et aequales tam cum cruribus aequalibus, quam cum recta angulum bifariam secante angulos facient; et quae ipsis insistunt triangula verticem habentia eundem cum triangulo aequicruri, aequalia erunt.

Quod quidem rursus eandem rem alio tantum respectu consideratam enuntiat, ac Theoremata I. et II.

§. 39.

Fig. 20. Casus III. Jam recta angulum B A C bifariam secans citra basin B C, seu intra triangulum A B C terminetur in D. Ductisque rursus D B, D C rectis; quaeritur, quid consecuturum sit per prop. 4tam?

Simili ratione ac §. 38. invenietur

Theorema VI. Si trianguli aequicruris angulum ad verticem bifariam secet recta intra ipsum triangulum terminata, et ex ejus extremo ad extrema basis ducantur duae rectae: eae inter se aequales erunt, et tam cum cruribus aequalibus, quam cum recta angulum bifariam secante aequales facient angulos; et quae ipsis insistunt triangula verticem habentia eundem cum triangulo aequicruri, inter se aequalia erunt. (cf. Chrestomath. geom. pag. 325. nro. 5.)

§. 40.

In hac figura habetur quadrilaterum A B D C, ἀκιδοειδὲς (cuspidatum) apud Proclum vocatum, vel κοιλογώνιον (cavangulum) (v. Chrestom. geom. p. 117.) habens nempe eum, qui est intra figuram a rectis B D, D C comprehensus, angulum concavum, seu duobus rectis majorem; qua assumta denominatione habebitur sequens, quod Theoremati II. respondet,

Theorema VII. Si quadrilateri cavanguli angulus is, qui angulo concavo opponitur, bifariam sectus sit diagonali per hos angulos ducta, et aequalibus comprehensus sit lateribus: erunt et reliqua latera in-

ter se aequalia, et reliqui anguli quadrilateri aequales et quadrilaterum eadem diagonali bifariam sectum erit, et anguli duo, in quos angulus concavus ea dividitur, aequales erunt.

§. 41.

Ac patet, Theoremata III, IV, (V), VI. sistere tantum tres Casus speciales Theorematis I.; quorum Casuum distinctio nitatur tribus modis, quibus illic extremum D rectae angulum B A C bifariam secantis, accipi potest respectu rectae B C extrema aequalium rectarum A B, A C jungentis: itemque Theorema VII. Theoremate II. ut Casum hujus specialem contineri.

§. 42.

In superoribus Triangulorum duorum (de quibus §. 31.) commune latus habentium altera duo latera ad idem ejus extremum et ad diversas partes jacentia, sic sita sumsimus, ut angulum inter se efficerent ad eas partes, ad quas est latus commune. Sed ea et in directum sita sumere poterimus; et sic sita, ut efficiant angulum ad partes a communi latere aversas. De his nunc agemus in Quaestione secunda et tertia.

---

§. 43.

Quaestio secunda.

Sint igitur duae rectae B A, A C in directum sitae, inter se aequales; et cum ipsis recta A D faciat aequales angulos: ductis rectis B D, C D, quid eveniet? *Fig. 21.*

Per prop. 4tam rursus erunt rectae D B, D C aequales, et triangula D B A, D C A aequalia, et an-

guli D B A, D C A aequales, et anguli B D A, C D A aequales.

Ad denominationem: primo in ipsa hypothesi, cum recta D A rectae B C insistens in A ponatur facere angulos D A B, D A C, qui deinceps sunt, aequales: hi anguli recti dicuntur, et recta D A ipsi B C perpendicularis per Defin.' 10; deinde potest recta B C bifariam secta in D dici ob aequales B A, A C. In consequentibus, rectae D B, D C dicentur eae, quae ab extremo insistentis perpendicularis ad extrema rectae dictae B C ducuntur; triangula D B A, D C A ea, quae illis rectis terminantur; anguli D B A, D C A ii, quos rectae modo dictae cum priori recta faciunt; anguli B D A, C D A ii, quos cum perpendiculari faciunt. Hinc sequens

Theorema VIII. Si rectae alicui terminatae in puncto, quo ea bifariam secta est, perpendicularis insistat recta: quae ex insistentis extremo ad prioris rectae extrema ducuntur rectae, inter se aequales erunt, et aequalia terminabunt triangula, et tam cum priori recta, quam cum insistente aequales facient angulos.

§. 44.

Denominationes aliter sic: Intelligatur primo triangulum D B C, cujus basis B C, vertex D; recta igitur D A basim bifariam et ad angulos rectos secat: haec ad hypothesin. Jam ad consequentia; propter aequalitatem rectarum B D, D C, dicetur triangulum illud aequicrus; anguli D B A, D C A ii, qui ad ejus basin; anguli B D A, C D A ii, in quos angulus ejus ad verticem dividitur. Hinc sequens

Theorema IX. Si recta e vertice trianguli ad basim ducta, ipsam bifariam et ad angulos rectos secet: aequicrus erit illud triangulum, et anguli ejus ad basim aequales, et tam ipsum triangulum, quam angulus ejus ad verticem recta ducta bifariam divisa erunt. (cf. Chrestom. Geom. p. 339 *Satz V.* ubi in fine sic corrigendum: *Sie halbirt auch den Winkel an der Spitze und das Dreyeck.*)

§ 45.

Rursus aliae denominationes: Concipiatur primo triangulum B A D habens angulum ad A rectum, et ipsi B A in directum adjecta A C aequalis B A: et erit angulus D A C ipsi D A B aequalis per Def. 10: tum et juncta sit D C. Jam B A dicatur basis trianguli B A D in quo igitur angulus B A D unus eorum, qui ad basim sunt, rectus est; D vertex trianguli; B D latus id, quod recto angulo opponitur; angulus A B D reliquus ad basin angulus. Tum A C in directum basi adjecta ipsi aequalis, cujus extremum C; recta C D ea, quae ab hoc extremo ad verticem trianguli ducitur; quae terminat triangulum D A C; et cum adjecta A C facit angulum A C D, et ad verticem D facit angulum C D A. Sic fiet

Theorema X. Si trianguli unus angulorum ad basin sit rectus, et juxta hunc angulum basi in directum adjiciatur recta ipsi aequalis: ex hujus extremo ad verticem trianguli ducta recta aequalis erit lateri, quod recto angulo opponitur, et triangulum terminabit priori aequale, et cum ipsa adjecta angulum faciet aequalem reliquo trianguli ad basin angulo ad verticem vero angulum angulo prioris trianguli ad verticem aequalem.

§. 46.

Fig. 22. Rursus idem alio respectu: Consideretur jam A D ut basis. A B ut latus trianguli B A D habentis angulum ad A rectum; et huic lateri aequalem A C abscindat recta ex reliquo ad basin angulo D ducta D C. Et reliquis convenienter denominatis; fiet

Theorema XI. Si trianguli unum latus basi insistat sub angulo recto, et ab ipso infra basin producto recta ex reliquo ad basin angulo ducta abscindat rectam dicto lateri aequalem: ea reliquo trianguli lateri aequalis erit, et triangulum terminabit priori aequale, et cum basi quidem angulum faciet aequalem angulo trianguli, qui est ad idem basis extremum; cum producto vero latere angulum angulo prioris trianguli ad verticem aequalem.

Sistunt igitur Theoremata VIII. — XI. eandem rem diverso tantum respectu denominatam, et huic convenienter diversa enuntiatione comprehensam.

---

§. 47.

Sequitur

Quaestio tertia.

Fig. 23. Sint duae rectae B A, A C comprehendentes angulum et aequales; et extra hunc angulum ad punctum A posita sit recta A D quantacumque, faciens cum illis angulos D A B, D A C aequales, et

ductae

ductae sint D B, D C recta. Quaeritur, quid consequatur per prop. 4am?

Resp. Rursus ut D B, D C aequales sint, et triangula D B A, D C A aequalia, et angulus D B A angulo D C A, angulus A D B angulo A D C aequales.

Ad denominationem; dicatur punctum D extremum rectae positae, si ea ut finita consideretur; vel at punctum in ipsa sumtum, si non ut finita: puncta B, C extrema rectarum aequalium: et reliquis convenienter denominatis, hoc erit

Theorema XII. Si duae rectae angulum comprehendentes aequales sint, et extra hunc angulum ad ipsius verticem recta posita sit comprehendens cum duabus illis rectis aequalibus angulos aequales; et ex puncto in ipsa sumto ad extrema rectarum aequalium ducantur duae rectae: eae inter se aequales erunt, et aequalia terminabunt triangula, et tam cum rectis aequalibus, quam cum recta exteriori posita facient angulos aequales.

§. 48.

Vel intelligatur B C ducta, ut sit triangulum A B C aequicrus, cujus vertex A, crura A B, A C, basis B C: et reliquis convenienter denominatis, fiet

Theorema XIII. Si e puncto extra triangulum aequicrus sumto ad ipsius verticem ducta sit recta faciens aequales cum cruribus ejus angulos: ex eodem puncto ad extrema basis ductae duae rectae inter se aequales erunt, et aequalia terminabunt triangula cruribus insistentia, et tam cum cruribus, quam cum priori ducta recta aequales facient angulos.

§. 49.

Vel rursus intelligitur D B A C quadrilaterum cavangulum, cujus diagonalis A D: et ceteris congrue denominatis erit

Theorema XIV. Si quadrilateri cavanguli et habentis latera circa angulum concavum aequalia, angulus concavus diagonali dividatur in duos angulos aequales: erunt reliqua duo latera inter se aequalia, et tam totum quadrilaterum, quam angulus concavo oppositus diagonali bifariam secta erunt, et reliqui anguli inter se aequales erunt.

§. 50.

Ἀνακεφαλαίωσις.

Sed haec omnia, quae ad tres quaestiones in superioribus tractatas proposita sunt theoremata, comprehendentur uno generaliori theoremate sic. Ponatur primo recta A D, cujus ad unum extremum A et ad diversas partes ductae sint duae rectae A B, A C, facientes cum illa angulos aequales, et ipsae inter se aequales; haec quidem pro hypothesi. Tum pro consequente, rectae D B, D C dicantur eae, quae ab altero prioris rectae A D extremo D ad posteriorum extrema B, C ductae sint; et reliquis convenienter denominatis, fiet

Theorema XV. Si cum aliqua recta in uno ejus extremo et ad diversas partes ductae aliae duae rectae faciant aequales angulos, et ipsae inter se aequales sint: quae earum extrema cum reliquo prioris extremo jungunt rectae. inter se aequales erunt, et aequalia terminabunt triangula, et aequales tam cum priori, quam cum duabus ductis facient angulos.

Dispescitur autem hoc Theorema in tres casus non demonstratione, quae in omnibus eadem est, sed figura; ex eo, quod duae ductae rectae aut in directum jaceant, aut angulum ad partes eas, ad quas est prior recta, aut ad aversas ab hac partes efficiant; ut supra dictum.

§. 51.

Vel adhibita jam ab initio denominatione triangulorum D A B, D A C, et recta communi D A pro basi assumta, et utraque rectarum aequalium A B, A C pro uno laterum utriusque trianguli, ergo D B, D C pro reliquo latere; sic erit

Theorema XVI. Si basi communi ad diversas partes insistant duo triangula, quae et latus lateri aequale habeant, quod uni basis extremo adjacet, et angulum angulo eidem adjacentem: habebunt et reliquum latus reliquo aequale, et ipsa inter se aequalia erunt, et reliquum ad basin angulum reliquo aequalem habebunt, et angulos ad vertices aequales.

§. 52.

At vero recta communi D A pro uno latere assumta, rectis aequalibus A B, A C pro reliquo latere utriusque trianguli; ergo D B, D C pro basi; ceterisque convenienter denominatis, fiet

Theorema XVII. Si duo triangula lateri communi utrinque adjacentia reliquum etiam latus reliquo aequale habeant, et ad commune latus in eodem ejus extremo sub aequali angulo applicatum: basin etiam basi aequalem habebunt, et ipsa inter se aequalia erunt, et reliquos (seu qui ad basin sunt) angulos re-

liquis aequales habebunt, tam qui communi lateri adjacent, quam qui ipsi opponuntur.

Addi etiam potest, ut praeter D A commune latus, rectae aequales A B, A C ut bases denominentur, et reliqua conveniens quaeratur enuntiatio.

§. 53.

Pergimus nunc in enumeratione modorum §. 31. inchoatà, quibus duo triangula habentia unum latus commune et reliquum latus reliquo aequale, ut et angulum illis lateribus comprehensum aequalem, juxta se invicem posita esse possunt: habeant enim jam

A, b) reliquum latus, ut et angulum dictum, ad diversa communis lateris extrema et ad diversas ejusdem partes.

---

§. 54.

Sit igitur

Quaestio quarta.

Rectae alicui A B in ejus extremis A et B duae aliae rectae A C, B D insistant sub angulis B A C, A B D aequalibus, et ipsae inter se aequales: junctis B C, A D, quid consequetur?

Fig. 24.

Quoniam A C est aequalis B D; duae igitur C A, A B duabus D B, B A aequales sunt: et est angulus C A B angulo D B A aequalis, qui sunt anguli illis lateribus comprehensi: ergo per prop. 4tam erit et ba-

sis B C basi A D aequalis, et triangulum A B C triangulo A B D aequale, et angulus A B C angulo B A D aequalis; hos enim subtendunt aequalia latera A C, B D; et angulus A C B angulo A D B aequalis: hos enim subtendit commune latus A B.

Jam ad denominationem: dicatur A B recta terminata, cujus extrema A et B, in quibus illi ad diversas partes insistant duae aliae A C, B D iis, quae jam nominatae sunt, conditionibus. Tum rectae B C, A D dicentur eae, quae terminos insistentium jungunt cum alternis prioris rectae extremis: recta scilicet C B terminum C rectae A C in rectae A B extremo A insistentis jungit cum ejusdem A B altero extremo B; similiterque recta D A terminum D rectae B D in extremo B insistentis jungit cum reliquo extremo A. Et reliquis convenienter denominatis, erit

Theorema XVIII. Si rectae alicui terminatae in duobus ejus extremis et ad diversas partes duae aliae rectae insistunt sub angulis aequalibus, et ipsae inter se aequales: quae harum terminos cum alternis prioris rectae extremis jungunt rectae, inter se aequales erunt, et aequalia terminabunt triangula, et aequales tam cum priori, quam cum duabus insistentibus facient angulos.

§. 55.

Vel si puncta C et D primo denominentur ad diversas rectae A B partes sita, e quibus ad hujus extrema ductae sint primo rectae C A, D B, deinde rectae C B, D A: eandem rem enuntiabit sequens

Theorema XIX. Si e duobus punctis ad diversas alicujus rectae partes sitis duae rectae ad unum

atque alterum hujus extremum ductae, et aequales sint et faciant aequales cum ipsa angulos: ex iisdem punctis etiam ad alterna prioris extrema ductae rectae inter se aequales erunt, et cum priori, itemque cum duabus prioribus ductis, aequales angulos facient, et aequalia terminabunt triangula.

§. 56.

Vel si A B concipiatur esse basis communis duorum triangulorum A B C, A B D, quorum latera aequalia A C, B D, et anguli his ad basin adjacentes aequales B A C, A B D; reliqua latera B C, A D; reliqui ad basin anguli A B C, B A D; anguli ad verticem A C B, B D A: fiet

Theorema XX. Si basi communi ad diversas partes insistant duo triangula, quae et latus lateri aequale habeant, quod diversis basis extremis adjacet, et angulum angulo aequalem, qui dicto lateri ad basin adjacet: habebunt et reliquum latus reliquo lateri aequale, et ipsa inter se aequalia erunt, et reliquum ad basin angulum reliquo aequalem habebunt, et angulos ad vertices aequales.

§. 57.

Vel si A B concipiatur esse commune latus; A C, B D reliqua latera; B C, B D bases; reliquis convenienter denominatis fiet

Theorema XXI. Si duo triangula lateri communi utrinque adjacentia reliquum quoque latus reliquo aequale habeant, et ad commune latus in duobus ejus extremis sub aequali angulo applicatum; basin

etiam basi aequalem habebunt. et ipsa inter se erunt aequalia. et reliquos angulos reliquis angulis, alterum alteri, aequales habebunt, tum qui communi lateri adjacent, tum qui ipsi opponuntur.

§. 58.

Vel si concipias quadrilaterum A D B C, cujus opposita duo latera A C, B D aequalia sint, et aequalibus angulis ad diagonalem A B inclinata: reliquis convenienter denominatis, fiet

Theorema XXII. Si quadrilateri duo latera opposita aequalia sint, et ad diagonalem aequali angulo inclinata: etiam duo reliqua latera opposita aequalia, et ad eandem diagonalem aequali angulo inclinata erunt, et duos angulos diagonali oppositos aequales habebunt; et ipsum quadrilaterum diagonali bifariam sectum erit.

§. 59.

Vel si hic phrasin mutuari libeat ex Euclidis prop. 27a primi; intelligantur duae rectae A C, B D utrinque productae ad E, F, et G, H: et dicatur recta A B in duas E F, G H incidens sic, ut faciat duos angulos alternos (*τας εναλλαξ γωνιας*, *Wechselwinkel*) E A B, A B H aequales; rectae A C, B D dicentur ab illis E F, G H abscissa segmenta dictis angulis adjacentia; rectae C B, D A dicentur eae, quae horum segmentorum terminos cum alternis incidentiae punctis jungunt (terminum quidem C cum incidentiae puncto B, terminum vero D cum incidentiae puncto A): et reliquis convenienter denominatis, erit sequens *Fig. 25.*

Theorema XXIII. Si in duas rectas lineas incidens recta linea angulos alternos aequales fecerit, et ab iisdem segmenta aequalia abscindantur dictis angulis adjacentia: rectae, quae horum segmentorum terminos cum alternis incidentiae punctis jungunt, aequales erunt, et aequalia terminabunt triangula, et aequales tam cum incidente facient angulos, quam cum duabus prioribus rectis ad segmentorum abscissorum terminos.

§. 60.

Quoniam anguli recti omnes aequales sunt, quod apud Euclidem positum est ut Axioma 10mum, aut ut postulatum quartum; sed demonstrationem admittit, ut et Proclus ostendit (v. Chrestom. geom. p. 127. sq): habebimus praecedentium Theorematum casum specialem, si pro angulis aequalibus sumamus rectos.

Fig. 26. Sint enim anguli B A C, A B D recti; hoc est, sint rectae A C, B D rectae A B perpendiculares; et sint eaedem, ut prius, aequales: junctae C B, D A aequales erunt, et facient angulos C B A, D A B aequales. Hoc generatim enuntiabit sequens

Theorema XXIV. Si alicui rectae in ipsius extremis ad diversas partes insistant duae perpendiculares aequales: quae harum terminos cum alternis prioris rectae extremis jungunt rectae, aequales inter se erunt, et priori rectae ad aequales angulos insistent, et aequalia terminabunt triangula.

§. 61.

Vel si hic rursus consideres quadrilaterum A C B D, cujus duo opposita latera A C, B D aequalia sint, et

diagonali A B perpendicularia: consequens est, ut et reliqua opposita latera C B, D A aequalia sint, et ad diagonalem A B aequalibus angulis inclinata, et triangula A B C, A D B aequalia. Igitur

Theorema XXV. Si quadrilateri duo latera opposita aequalia sint et diagonali perpendicularia: reliqua duo opposita latera pariter aequalia erunt, et ad eandem diagonalem aequalibus angulis inclinata, et quadrilaterum diagonali bifariam divisum.

§. 62.

Quodsi jam angulus C B A ponatur rectus; ceterum, ut supra, tam rectae A C, B D, quam anguli C A B, A B D inter se aequales; consequens est, ut angulus D A B, quippe angulo C B A aequalis, et ipse rectus sit: seu, si C B perpendicularis ad A B, ut et D A ad eandem perpendicularis sit. Erit igitur praecedentis Theor. XXIV. quasi conversum *Fig. 27.*

Theorema XXVI. Si ad diversa rectae alicujus extrema e duobus punctis ad diversas illius partes sitis ductae duae quidem rectae aequales fuerint et aequaliter ad ipsam inclinatae; ex iisdem autem punctis ad alterna prioris extrema ductarum una illi perpendicularis sit: etiam altera ipsi perpendicularis erit, et priori aequalis.

§. 63.

Vel, ut in quadrilatero A C B D,

Theorema XXVII. Si quadrilateri duo opposita latera aequalia sint et ad diagonalem aequaliter inclinata; duorum vero reliquorum laterum unum

eidem diagonali perpendiculare sit: etiam alterum eidem perpendiculare erit, et priori aequale; et quadrilaterum illa diagonali bifariam divisum erit.

§. 64.

Jam in enumeratione binorum triangulorum latus commune ac reliqua quae conditiones propositionis 4tae postulant, habentium, pergimus ad ea, quae:

A, c) reliquum latus reliquo lateri aequale et sub angulo aequali, ad diversa quidem communis lateris extrema, sed ad easdem ipsius partes habent.

---

§. 65.

Sit igitur

Quaestio quinta.

Fig. 28. Rectae alicui A B, in duobus ipsius extremis A et B, et ad easdem partes, insistant duae rectae aequales A C, B D, diversos habentes terminos C et D; quod quidem duplici modo fieri potest, ut aut a se invicem sejunctae sint (fig. a.); aut se invicem intersecent (fig. b.) Tum junctis C B, D A rectis; quid consequetur?

Utroque Casu per prop. 4tam consequitur: rectas C B, D A aequales esse, et triangulum C A B triangulo D B A, et angulum A B C angulo B A D, et angulum A C B angulo B D A aequalem esse.

Ad denominationem: praeter ea, quae jam dictis contenta sunt, rectae C B, D A dicentur eae, quae a terminis insistentium ad alterna prioris rectae extrema ducuntur. Sic fiet

Theorema XXVIII. Si rectae alicui terminatae in extremis ejus et ad easdem ipsius partes, aequales insistant rectae et sub angulis aequalibus; sive illae non occurrentes sibi invicem, sive se invicem intersecantes; et a terminis insistentium ad alterna prioris rectae extrema ducantur rectae: eae inter se aequales erunt, et aequalia terminabunt triangula, et angulos tam cum priori recta aequales facient, quam cum insistentibus, quos ad earum terminos faciunt.

§. 66.

Si primum consequens solum sumamus: assumto praeterea, quod hic ut notum supponi potest (etsi stricta methodo propositioni El. I, 20. demum subjungendum sit): tantam esse puncti ab altero puncto distantiam, quanta est recta linea duo illa puncta connectens: fiet sequens

Theorema XXIX. Si rectae alicui in ipsius extremis duae insistant rectae aequales ad easdem partes et sub aequalibus angulis: termini eorum ab alternis prioris rectae extremis aequaliter distabunt.

§. 67.

Alia denominatio: Dicatur A B basis communis triangulorum A B C, B A D, quae et latus A C lateri B D aequale habent, et angulos C A B, D B A aequales, quibus illa latera ad basin inclinantur; dicentur ergo B C, A D reliqua latera; anguli C B A, D A B

reliqui ad basin; anguli vero ad C et D anguli ad vertices. Et fiet

Theorema XXX. Si duo triangula communi basi ad easdem partes insistentia, latus etiam lateri aequale habeant in diversis basis extremis insistens, et aequali angulo ad basin inclinatum: reliquum etiam latus reliquo aequale habebunt, et ipsa inter se aequalia erunt, et reliquum ad basin angulum reliquo, et angulos ad vertices aequales habebunt.

§. 68.

Fig. 29. Ducta recta C D, consideretur quadrilaterum A B D C (Fig. a.) vel A B C D (Fig. b.)

Ad Fig. a. habes duo opposita latera A C, B D aequalia et ad basin A B (hanc enim hic quoque ut basin spectabimus) aequalibus angulis inclinata; haec pro hypothesi. Pro consequente, diagonales sunt A D, B C: anguli B C A, A D B dicantur ii, quibus diagonales ad dicta latera in eorum extremis basi oppositis inclinantur: in reliquis nihil difficultatis. Et erit

Theorema XXXI. Si quadrilateri duo latera opposita aequalia sint et aequalibus ad basin angulis inclinentur: duae ejus diagonales aequales erunt, et aequaliter tam ad basin, quam ad dicta latera in eorum extremis basi oppositis inclinabuntur; et triangula, quae illis lateribus adjacent et communi basi insistunt, inter se aequalia erunt.

§. 69.

Ad Fig. b. habes in hypothesi duas diagonales A C, B D aequales et aequaliter ad basin A B inclinatas. Pro consequente, erunt A D, B C latera duo ba-

si insistentia; anguli D A B, C B A ii, quibus illa ad basin inclinantur; anguli A D B, B C A ii, quibus eadem ad diagonales in earum terminis basi oppositis inclinantur Hinc fiet

Theorema XXXII. Si quadrilateri duae diagonales aequales sint et aequalibus angulis ad basin inclinatae: latera duo basi insistentia aequalia erunt, et aequaliter tam ad basin, quam ad duas diagonales in earum extremis basi oppositis inclinata; et triangula, quae diagonalibus adjacent et communi basi insistunt, aequalia erunt.

§. 70.

Eorum, quae ad Fig. a. dicta sunt, specialem rursus casum sistet, consimili ratione ac §. 60.

Theorema XXXIII. Si alicui rectae in ipsius extremis ad easdem partes insistant perpendiculares aequales: quae ipsarum terminos cum alternis prioris rectae extremis jungunt rectae, aequales inter se erunt, et priori rectae ad aequales angulos insistent, et aequalia terminabunt triangula. *Fig. 30.*

§. 71.

Vel, juncta rursus C D, ad quadrilaterum A B D C erit

Theorema XXXIV. Si quadrilateri duo latera opposita aequalia sint et basi perpendicularia: diagonales quoque aequales erunt et ad basin aequaliter inclinatae, et aequalia super communi basi terminabunt triangula.

§. 72.

Fig. 81. Contra, ut §. 62., posito C B A angulo recto, consequetur

Theorema XXXV. Si ad diversa rectae alicujus extrema e duobus punctis ad easdem illius partes sitis ductae duae quidem rectae aequales fuerint et aequaliter ad ipsam inclinatae; ex iisdem autem punctis ad alterna prioris extrema ductarum una illi perpendicularis sit: etiam altera ipsi perpendicularis erit, et priori aequalis.

§. 73.

Et rursus ducta C D, analoge §. 63. fiet

Theorema XXXVI. Si quadrilateri duae diagonales aequales sint, et aequaliter ad basin inclinatae; laterum autem basi insistentium unum ipsi perpendiculare sit: alterum quoque basi perpendiculare, et priori aequale erit, et erunt triangula, quae super communi basi terminantur a duabus diagonalibus, aequalia.

§. 74.

Pertractavimus omnes modos, quibus duo triangula commune latus habentia et reliquas prop. 4tae hypotheses, juxta se invicem posita esse possint: patebit enim consideranti, alium praeter eos, quos tractavimus, nullum esse posse. Sumamus nunc

B) duo triangula, quibus insint ea, quae hypothesis prop. 4tae postulat, sic, ut non modo aequalis sit angulus unius angulo alterius trianguli, sed ut idem et communis sit utrique triangulo.

In his igitur latera lateribus, alterum alteri, sed non aequale aequali, eadem directione et ex communi extremo, quod nempe illius anguli vertex est, protenduntur.

---

§. 75.

Sit igitur

Quaestio sexta.

Sit triangulum A B C habens latera A B, A C inaequalia, et ad ipsum constituatur aliud triangulum, habens cum illo angulum ad A communem, latera autem circa hunc angulum lateribus A B, A C, alterum alteri, aequalia. Quod sic fiet: producto minori latere A C, abscindatur A D aequalis majori A B; et a majori A B abscindatur A E aequalis minori A C; ac jungatur recta D E. Habebit ergo triangulum A D E angulum ad A cum triangulo A B C communem, latera autem A D, A E illius lateribus A B, A C, alterum alteri, aequalia. Jam in his duobus triangulis quaeritur, quid per prop. 4tam consequatur? *Fig. 32.*

Consequentia haec sunt: rectam B C rectae D E, et triangulum A B C triangulo A D E, et angulum A B C angulo A D E, et angulum A C B angulo A E D aequalia esse.

Jam ad denominationem: dicentur B C, D E duae rectae intra angulum B A C ab una rectarum hunc comprehendentium ad alteram ductae, quae abscindant segmenta anguli vertici A adjacentia A B, A E

segmentis A D, A C, alterum alteri, aequalia: triangula A B C, A D E dicentur ea, quae ductis rectis B C, D E terminentur, et angulum dictum communem habeant; anguli A B C, A D E dicentur ii, quibus ductae B C, D E inclinentur ad rectas angulum comprehendentes in extremis aequalium segmentorum A B, A D; itemque anguli A E D, A C B ii, quibus in segmentorum A E, A C: dicentur autem interni hi anguli, hoc est, ad eas partes, ad quas est vertex A anguli B A C, siti (de externis enim seu ad alteras, quam ad quas est ille vertex, partes jacentibus B E D, D C B hic non agitur). Hisce denominationibus fiet

Theorema XXXVII. Si intra angulum duae rectae ab una rectarum ipsum comprehendentium ad alteram ductae segmenta ab iis duo duobus, alterum alteri, aequalia abscindant, quae anguli illius vertici adjacent: ductae rectae inter se aequales erunt, et aequalia terminabunt triangula ea, quae angulum dictum communem habent, et ad priores rectas in aequalium segmentorum terminis aequalibus angulis internis inclinatae erunt.

§. 76.

Vel, quia puncta B, D a vertice anguli ad A aequaliter distant, itemque puncta E, C: fiet

Theorema XXXVIII. Si intra angulum a duobus crurum ejus punctis a vertice aeque distantibus ad duo alia crurum puncta item a vertice aeque distantia ducantur duae rectae; eae inter se aequales erunt, et aequalia terminabunt triangula vertici adjacentia, et aequa-

aequalibus angulis internis ad crura tam in prioribus, quam in posterioribus punctis inclinabuntur.

§. 77.

Sumto autem solo primo consequente, sic enuntiabitur

Theorema XXXIX. Rectae duae inter crura anguli a duobus eorum aequaliter a vertice distantibus punctis ad duo alia item aequaliter distantia ductae, inter se sunt aequales.

Theorema XL. Vel, in angulo duae rectae ab extremis duorum aequalium a cruribus abscissorum inde a vertice segmentorum ad extrema duorum aliorum pariter aequalium segmentorum ductae, aequales sunt.

§. 78.

Ducta jam recta B D, intelligatur triangulum A B D aequicrus, cujus e basis extremis ad crura ipsa ductae sint rectae B C, D E, abscindentes ab iis segmenta aequalia A C, A E vertici trianguli A adjacentia: et erit *Fig. 33.*

Theorema XLI. Si a cruribus trianguli aequicruris aequalia duo inde a vertice abscissa fuerint segmenta, et ex horum terminis ad opposita basis extrema ducantur rectae: eae aequales erunt, et aequalia terminabunt triangula habentia communem cum priori triangulo verticem, et aequales facient angulos cum cruribus tam in extremis basis, quam in abscissorum segmentorum terminis internos (sive eos, qui ad partes verticis jacent).

§. 79.

Fig. 34. Ducta vero recta E C, ut sit A E C triangulum aequicrus, cujus ad continuationes crurum C D, C B, ex basis extremis E, C ductae sint rectae E D, E B, abscindentes a productis cruribus segmenta aequalia vertici trianguli adjacentia A D, A B: fiet

Theorema XLII. Si a cruribus trianguli aequicruris ultra basin continuatis abscissa fuerint aequalia inde a vertice segmenta, et ex horum terminis ad opposita basis extrema ducantur rectae: eae aequales erunt, et aequalia terminabunt triangula habentia communem cum priori triangulo angulum ad verticem, et facient aequales angulos tam cum segmentis abscissis, quam cum ipsis cruribus in extremis basis.

§. 80.

Fig. 35. Ab his, de quibus proxime egimus (§. 79.) transitus, si placet, fieri poterit ad Euclideam figuram prop. 5tae 1mi, in qua est triangulum aequicrus A B Γ, et ad ejus crura continuata ductae e basis extremis B, Γ rectae B H, Γ Z abscindunt segmenta A Z, A H aequalia: quibus quae consequentia sint, modo ostendimus. Hinc jam quaestio discenti proponi potest de triangulis Z B Γ, H Γ B, quid in his porro consequatur: ut ex eorum consideratione inveniat angulos Z B Γ, H Γ B aequales esse, atque ita deveniat ad enuntiandam propositionem generalem: Trianguli aequicruris cujusque angulos infra basin

aequales esse. Et deinceps angulorum ad basin quoque aequalitas ostendetur. *)

Postquam enim his, quae in hoc Capite pertractavimus, aut aliis talibus exemplis aliquantisper exercitati fuerint discipuli in usu prop. 4tae, ut jam in ea, ubi opus est, applicanda non amplius haereant, et omnino geometricis contemplationibus assuefacti paullatim et habilitatem aliquam nacti sint: non est dubium, quin maxima pars sublata sit illius difficultatis, quam facile cruda alioqui discentium ingenia in festinato simplici a quarta Euclidis ad quintam transitu experiuntur: ex quo Propositio quinta Pontis asinini et Fugae miserorum cognomen traxit (cf. Chrest. geom. p. 195.).

§. 81.

Theoremata in hoc Capite enuntiata numeris distinximus, non eum in usum, qui alias sollennis est in Mathematicis, ut ad antecedentia provocari posset in subsequentibus; quod hic non fuit necesse: neque etiam illa sunt omnia ejusmodi, ut eandem rem dicant verbis tantum discrepantibus; nec rursus, ut omnia diversitate verborum res quoque diversas significent. Hoc autem commune habent, quod singula ex simplici et immediata propositionis quartae applicatione prove-

*) Hoc modo a praemissis plerisque eorum, quae hoc capite tractata sunt, ad demonstrandam Euclidis quintam transitum feci cum alumnis Seminarii Schönthal in eo disciplinae cursu, de quo supra in not. ad §. 33.: in quo inveni, per praemissas hujus capitis exercitationes pleraque ingenia satis praeparata fuisse ad percipiendam demonstrationem Euclideae quintae.

veniunt: ut adeo major fere verborum in iis sit quam rerum variatio. Est autem haud contemnendum cogitandi exercitium, eandem licet rem pluribus modis considerare, et rerum distincta enuntiatio ad justam earum cognitionem non minimum adminiculum est. Brevitas autem illa loquendi, cujus studiosos esse Mathematicos vulgo constat, et eam peculiaribus quoque signis quibusdam technicis adhibendis consectari, ut in progressu institutionis omnino necessaria est; sic incipientium captui, cavendum, ne officiat. Etenim in progressu quidem doctrinae nimis longum foret, in partibus intermediis, quibus constant geometricarum propositionum demonstrationes, omnes eas res, quae in singulari figura brevibus verbis ostenduntur, verbis etiam generalibus persequi: quamquam id quoque, fuit, qui in totis sex primis Elementorum Libris efficere conaretur, Scheubelius, ita ut de geometricis figuris sine literis Alphabeti adscriptis loqueretur: in quo ille institutum per se non omni ex parte improbandum longius fortasse, quam opus erat, persecutus est (cf. Chrestom. geom. p. 175.). Sed in initiis hujus doctrinae saltim, in quibus hic versamur, multorum videtur novitiorum studiis consultius futurum, si in illis tradendis hanc, de qua loquimur, in verbis moram minus fastidiremus; in verbis, inquam, non talibus, quae mentis vim retardent et fere obtundant, nihil lucis afferentia, sed quae attentionem ad res figant ac detineant, et cogitationem atque intelligentiam adjuvent. Hoc enim ipsum propositum erat in his, quae hic dedimus, theorematis: quod etiam excuset longiorem in multis eorum enuntiationem, et ab Euclidea propositionum concinnitate longe deficientem.

In Euclideis enim propositionibus id spectavit auctor, ut et memoriae se facile insinuarent, et essent ad applicationem tractabiles: quocirca passim etiam formulas ita breves, ut explicatione indigeant (quales *αἱ κατα κορυφην γωνιαι, αἱ ἑξης γωνιαι, αἱ εναλλαξ γωνιαι*) adhibuit, et subaudiendum quoque aliquid interdum reliquit (cf. Chrestom. geom. p. 223.) Hic contra omnia sic, ut per se intelligi possent, et satis definite dici, et sine licentia, praeter vulgarem vocum usum quicquam in denominationibus assumendi, oportuit; cum quidem in his enuntiationibus merum exercitium, et primae institutionis aliquod adminiculum quaesitum sit, in quo quasi ludens ad tempus se juvenilis exerceat industria; nihil quod memoriae inculcari propter posteriores applicationes oporteat; ad quas, quod illa forte theoremata omnia praestare possent, id sola Elementorum propositio quarta satis praestat.

§. 82.

Sed in hac ipsa propositione quarta, restat exercitii gratia, ut enuntiationis variationem aliquam experiamur: quod cum ad Caput Imum pertinuisse videatur, huc rejicere maluimus, ubi, quid in his variationibus spectetur, prius fuisset expositum.

Itaque, omissa in hypothesi voce trianguli, si dicamus rectas B A, A C facientes angulum, et iis aequales duas alteras E D, D F, alteram alteri, et aequalem facientes angulum; rectam B C eam, quae priorum, et E F eam, quae posteriorum extrema jungit; angulos A B C, D E F eos, quos mo- *Fig. 12.*

do dictae cum duabus aequalibus faciunt; similiterque angulos A C B, D F E; ubi et triangula ipsa A B C, D E F dicere possumus spatia, quae eaedem B C, E F, una cum prioribus, altera cum posterioribus comprehendant: fiet

Enuntiatio variata propositionis quartae Elementorum: Si duabus rectis angulum facientibus aliae duae rectae, altera alteri, aequales sint, et aequalem comprehendant angulum: recta ea, quae priorum et ea, quae posteriorum extrema jungit, inter se aequales erunt, et cum utrislibet aequalibus aequales facient angulos; et spatia, quae illa cum prioribus, haec cum posterioribus comprehendit, aequalia erunt.

§. 83.

Idem paullo aliter: Si angulus angulo aequalis sit, et crura unius cruribus alterius, alterum alteri, aequalia: quae extrema crurum jungunt rectae, aequales erunt, et aequalia terminabunt triangula, et cum utrisvis cruribus aequalibus aequales facient angulos.

§. 84.

Fig. 36. Vel si dicamus rectam B C incidentem in duas angulum facientes et cum his comprehendentem spatium, et ab iis abscindentem rectas A B, A C; et similiter rectam E F incidentem in duas alias, et ab his abscindentem rectas D E, D F: erit haec

Alia enuntiatio prop. 4tae: Si duabus rectis lineis angulum facientibus et recta linea in ipsas incidente comprehendatur spatium; et duabus aliis rectis angulum priori aequalem facientibus et in easdem

incidente recta comprehendatur aliud spatium; sintque eae. quas prior incidens a prioribus, iis, quas posterior incidens a posterioribus abscindit, duae duabus, altera alteri, aequales: erit et prior incidens posteriori incidenti aequalis, et prius spatium posteriori aequale, et anguli, quibus duae incidentes ad abscissas utraslibet aequales inclinantur, aequales.

§. 85.

Aut si primo rectas B C et E F concipiamus, quibus in ipsarum extremis insistant rectae concurrentes B A, A C et E D, D F: reliquis convenienter denominatis, erit

Alia ejusdem 4tae enuntiatio: Si utrique duarum rectarum in ipsius extremis insistant duae rectae in puncto concurrentes, et sint duae, quae uni, duabus, quae alteri ipsarum insistunt, altera alteri, aequales, et aequalem comprehendant angulum: erunt et duae rectae, quibus insistunt, inter se aequales, et spatia, quae cum insistentibus continent, aequalia; et insistentium utraelibet aequales aequaliter ad ipsas inclinatae erunt.

§. 86.

Idem rursus paullo aliter et forma negativa: Si super exposita recta in ipsius extremis constitutae duae rectae lineae in alio puncto coëant et faciant angulum; et super alia exposita recta in ejus extremis constitutae duae rectae, duabus prioribus, altera alteri, aequales, item in aliquo puncto coëant, et ibi faciant angulum: non poterit posterior angulus priori angulo aequalis esse aliter, quin et posterior exposita priori expositae aequalis sit.

§. 87.

Si in triangulo distinguuntur duo latera et basis; is angulus, quem latera comprehendunt, dicitur et angulus ad verticem; reliqui vero anguli ad basin. Hinc pro ultimo consequente

Alia enuntiatio: Si duo triangula et angulum angulo, qui ad vertices sunt, et latera lateribus, duo duobus, alterum alteri, aequalia habeant: angulos quoque ad basin, alterum alteri, aequales habebunt, eos quidem, qui aequalibus lateribus opponuntur.

§. 88.

Possunt et duo casus distingui, quando duo triangula aequicrura sunt (sic ut latera inter se aequalia habeant), et quando non. Et si quidem prius; erunt non tantum angulus A B C angulo D E F, et angulus A C B angulo D F E aequales; sed pari ratione etiam angulus A B C angulo D F E, et angulus A C B angulo D E F. Hinc in ipsa propositione duo statim casus discerni possunt sic:

Triangulorum duorum angulum angulo, qui est ad verticem, et latera duo duobus, alterum alteri, aequalia habentium, si quidem aequalia sunt illa latera in singulis triangulis, erunt et anguli, qui ad basin, uterque utrique aequales. Si vero inaequalia sint illa latera in singulis triangulis: habebunt angulum ad basin angulo ad basin aequalem tum eum, qui majori lateri, tum eum, qui minori opponitur.

CAPUT III.

Continuatio superioris.

§. 89.

In hoc Capite considerabimus primo duo triangula, quae habeant conditiones propositionis quartae, sic posita, ut latus unius et ipsi aequale latus alterius in eadem recta linea jaceant; ita quidem, ut aut in directum sint sibi invicem (Theor. I.), aut ut segmentum commune habeant (Theor. II.), aut ut ab se invicem sejuncta sint (Theor. III.).

Deinde sic posita, ut basis unius et basis alterius trianguli (intelligendo hanc denominationem sensu ipsius prop. 4tae) in eadem linea recta jaceant; et rursus aut in directum (Theor. IV.); aut segmentum commune habeant (Theor. V.); aut sejuncta sint (Theor. VI.).

Tum sic posita, ut latus unius et latus alterius trianguli, diversum quidem ab eo, quod illi aequale po-

nitur. in recta linea sita sint; et aut e communi extremo secundum eandem directionem protendantur (Theor. VII.) aut in directum sibi invicem jaceant (Theor. VIII.); aut unum sit segmentum alterius, duobus hujus punctis intermediis interceptum (Theor. IX.); aut ut segmentum commune habeant (Theor. X.); aut ut sejuncta sint (Theor. XI.).

Postea sic posita, ut latus unius et basis alterius trianguli in eadem linea recta sint: et aut in directum sita sint (Theor. XII.); aut e communi extremo secundum eandem directionem protendantur (Theor. XIII — XV.); aut sejuncta sint (Theor. XVI.)

Denique sic posita, ut nihil praeter unum punctum commune habeant; cui adjaceant duo anguli, qui aequales ponuntur; aut etiam alii (Theor. XVII — XXIV.).

§. 90.

Theor. I. Si duo triangula basim basi aequalem et in directum sitam habeant, sive ad easdem, sive ad diversas basium partes constituta; et latus alterutrum cum angulo ad basin ipsi adjacente, lateri alterutri item cum angulo ad basin ipsi adjacente aequale habeant: habebunt et reliquum latus reliquo aequale, et ipsa inter se aequalia erunt. et reliquum ad basin angulum reliquo, et angulum ad verticem angulo ad verticem aequalem habebunt.

Habeant triangula A B C, B D E basin A B
Fig. basi B D aequalem et in directum sitam. et latus
37. cum angulo ad basin adjacente aequale lateri
a. b. item cum angulo ad basin ipsi adjacente. Sumi autem poterit aut latus adjacens uni extremorum punctorum totius A D, A vel D, et latus adjacens pun-

cto intermedio et communi B; aut latera utrique punctorum extremorum A et D adjacentia; aut latera duo puncto communi et intermedio B adjacentia; qui sunt casus tres.

§. 91.

Casus I. Sit igitur, praeter basin A B basi B D aequalem, primo latus A C aequale lateri BE, et angulus B A C augulo D B E aequalis. Erit et reliquum latus B C aequale reliquo D E, et triangulum A B C aequale triangulo B D E, et angulus ad verticem A C B aequalis angulo ad verticem B E D, et angulus A B C angulo B D E.

Hic casus sic enuntiari poterit: Si duo triangula basin basi contiguam et aequalem, et in eadem linea recta sitam habeant, sive ad easdem sive ad diversas illius lineae rectae partes constituta sint; et habeant latus lateri aequale, et ad basin aequaliter inclinatum, quorum unum in uno illius rectae extremo, alterum in communi duarum basium termino terminetur: habebunt et reliquum latus reliquo lateri aequale et aequali ad basin angulo inclinatum, et ipsa inter se erunt aequalia, et angulum ad verticem angulo ad verticem aequalem habebunt.

§. 92.

Vel si rectae alicui terminatae duae rectae, sive ad easdem, sive ad diversas illius partes, una in uno ipsius extremo, altera in puncto, in quo illa bifariam secta est, insistant, inter se aequales, et facientes angulum angulo aequalem, quem altera cum altero illius rectae segmento faciunt: quae a termino prioris

insistentis ad punctum bisectionis, et a termino posterioris insistentis ad alterius segmenti extremum iunguntur rectae, inter se aequales erunt, et aequalia terminabunt triangula, et tam cum duobus insistentibus quam cum duobus segmentis aequales facient angulos.

§. 93.

Fig. 37. b. Casus II. Sit jam, praeterquam quod basis A B basi B D aequalis est, latus A C aequale lateri D E, et angulus B A C angulo B D E. Erit et reliquum latus B C aequale reliquo lateri B E, et triangulum A B C triangulo B D E aequale, et angulus ad basin reliquus A B C reliquo D B E aequalis, et angulus ad verticem A C B angulo ad verticem B E D aequalis.

Hic casus et sic enuntiari poterit:

Si duo triangula basin basi contiguam et aequalem, et in eadem linea recta sitam habeant, sive ad easdem, sive ad diversas illius rectae lineae partes constituta sint; habeant autem et latus lateri aequale, et ad basin aequaliter inclinatum, quod uno et altero illius rectae extremo terminatur: habebunt et reliquum latus reliquo lateri aequale, quod eodem puncto illius rectae intermedio et utrique basi communi, terminatur, et aequali ad basin angulo terminatum; et ipsa inter se erunt aequalia, et angulum angulo, quem bases subtendunt, aequalem habebunt.

§. 94.

Vel si rectae alicui terminatae in ipsius extremis, sive ad easdem sive ad diversas partes, insistant re-

ctae aequales sub angulis aequalibus; et ab harum terminis ad punctum, in quo prior recta bifariam secta est, ducantur rectae lineae: eae inter se aequales erunt, et aequalia terminabunt triangula. et aequaliter tum ad priorem rectam, tum ad insistentes inclinatae erunt.

Si autem insistentium una occurrat alteri in ipsius extremo; ipsa quoque in illo extremo terminabitur. Et si una occurrat alteri in puncto inter ipsius extrema intermedio; ipsam secabit. Fig. 37, β. Hoc ex El. I, 6. consequitur.

§ 95.

Casus III. Sit jam praeter basin A B basi B D aequalem, latus B C aequale lateri B E et angulus A B C angulo D B E. Erit et reliquum latus C A reliquo E D aequale, et triangulum C A B triangulo E D B et angulus ad basin reliquus C A B reliquo E D B aequalis, et angulus ad verticem C angulo ad verticem E aequalis. Fig. 37, b.

Hic casus separatim sic enuntiabitur:

Si duo triangula basin basi contiguam et aequalem habeant et in eadem recta linea sitam, sive ad easdem sive ad diversas hujus rectae partes constituta; et habeant latus lateri aequale et aequaliter ad basin inclinatum, quod terminatur puncto, in quo bases se invicem tangunt: habebunt et reliquum latus reliquo aequale, quae nempe in extremis dictae rectae terminantur, et aequali ad basin angulo inclinatum, et ipsa triangula erunt aequalia, et angulos ad vertices invicem aequales habebunt.

§. 96.

Vel si a puncto, in quo recta aliqua terminata bifariam secta est, duae aequales rectae, ad easdem

aut diversas ipsius partes, eductae sint, facientes angulum angulo aequalem, quem alterutra cum alterutro segmento facit: rectae ab earum terminis ad dictorum segmentorum extrema ductae inter se aequales erunt, et aequalia terminabunt triangula, et aequalibus angulis tam ad segmenta dicta, quam ad ipsas eductas inclinatae erunt.

§. 97.

Theor. II. Si duo triangula basin basi aequalem et in eadem recta linea sitam habeant, sic ut segmentum aliquod illius rectae sit utrique basi commune; sive ad easdem, sive ad diversas illius rectae lineae partes constituta sint; habeant autem et latus alterutrum lateri alterutri aequale, et angulum angulo aequalem, quo utrumque illud latus ad basin inclinatur: habebunt et reliquum latus reliquo lateri aequale, et ipsa triangula erunt aequalia, et reliquum ad basin angulum reliquo aequalem habebunt, et angulum ad verticem angulo ad verticem aequalem.

Fig. 38, a. b. Habeant triangula A B C, D E F bases A B, D E aequales et in eadem recta linea, sic ut segmentum ejus D B sit utrique basi commune, et sint aut ad easdem, aut ad diversas illius rectae partes constituta: et habeant alterutrum latus A C vel B C alterutri lateri D F vel E F aequale, et angulum angulo aequalem, quo utrumque illud latus ad basin inclinatur. Quoniam autem puncta A, E sunt termini basium exteriores, puncta B D termini basium interiores: erit aut latus lateri aequale, quorum unum exteriori, alterum interiori termino adjacet; aut quo-

rum utrumque termino exteriori adjacet, aut quorum utrumque termino interiori adjacet.

§. 98.

Cas. I. Sit ergo primo, praeter basin A B basi D E aequalem, ut jam diximus, latus A C exteriori termino A adjacens aequale lateri D F interiori termino D adjacenti, et angulus B A C angulo E D F aequalis. Erit etiam reliquum latus B C aequale reliquo E F. et triangulum A C B triangulo D F E aequale, et reliquus ad basin angulus A B C reliquo D E F aequalis, et ad verticem C angulus angulo ad verticem F aequalis. *Fig. 38, a.*

§. 99.

Cas. II. Sit latus A C adjacens termino exteriori A aequale lateri E F adjacenti alteri termino exteriori E; et angulus B A C angulo D E F aequalis. Erit et reliquum latus B C reliquo D F aequale. et triangulum A C B triangulo D F E aequale, et reliquus ad basin angulus A B C reliquo E D F aequalis, et angulus ad verticem C angulo ad verticem F. *Fig. 38, b.*

§. 100.

Cas. III. Sit latus B C termino uni ex interioribus B adjacens aequale lateri D F termino reliquo interiori adjacens; et angulus A B C angulo E D F aequalis. Erit et reliquum latus A C reliquo E F aequale, et triangulum A C B triangulo D F E aequale, et reliquus ad basin angulus B A C reliquo D E F aequalis, et angulus ad verticem C angulo ad verticem F aequalis. *Fig. ead.*

§. 101.

Theor. III. Si duo triangula basin basi aequalem et in eadem recta linea sitam habeant, sic ut inter duas bases jaceat segmentum illius rectae neutri basi commune; sive ad easdem, sive ad diversas illius rectae lineae partes constituta sint illa triangula; habeant autem et latus alterutrum lateri alterutri aequale, et angulum angulo aequalem, quo utrumque illud latus ad basin inclinatur: habebunt etiam reliquum latus reliquo lateri aequale, et ipsa triangula erunt aequalia, et reliquum ad basin angulum reliquo, et angulum ad verticem angulo ad verticem aequalem habebunt.

Fig. 39. a. b. Habeant triangula ABC, DEF bases AB, DE aequales et in eadem recta linea AE, sic ut inter ipsas jaceat segmentum illius rectae lineae BD neutri basi commune; sive ad easdem sive ad diversas rectae AE partes constituta sint illa triangula; et habeant alterutrum latus AC vel BC alterutri lateri DF vel EF aequale, et angulum angulo aequalem, quo utrumque illud latus ad basin suam inclinatur. Quoniam autem puncta A, E sunt exteriores, puncta B, D interiores basium termini: sumi potest aut latus lateri aequale esse, quorum unum exteriori, alterum interiori termino adjacet; aut utrumque exteriori, aut utrumque interiori adjacens: unde tres existunt casus.

§. 102.

Fig. 39, a. Cas. I. Sit ergo primo, praeter basin AB basi DE aequalem, latus AC exteriori termino A adjacens aequale lateri DF interiori termino

D

D adjacenti. Et reliqua in hoc casu, ut et in reliquis casibus, manent ut §. 98. ss. ad Fig. 38, a. b. *Fig. 39, b.*

§. 103.

Possunt autem Propositiones Theor. I. II. III. hac quoque enuntiatione comprehendi:

Si ad expositam rectam aliquam e duobus punctis extra ipsam sumtis (sive ad easdem, sive ad diversas expositae partes sumta sint) ductae duae rectae et inter se aequales sint, et angulum angulo aequalem faciant, quem cum exposita comprehendunt ad partes alterutras; et ex iisdem duobus punctis aliae duae ducantur rectae, quae ab exposita recta segmenta abscindant aequalia adjacentia prioribus ductis ad partes angulorum aequalium: erunt et posteriores ductae inter se aequales, et aequalia terminabunt spatia, et cum prioribus ductis aequalem comprehendent angulum, et ad expositam ipsam aequali inclinabuntur angulo ad partes prioris ductae.

§. 104.

Item: Si in exposita recta duo segmenta sumta sint aequalia, duobus sumtis punctis adjacentia, et ex iisdem punctis eductae sint (sive ad easdem, sive ad diversas expositae rectae partes) rectae aequales et aequalibus angulis ad dicta segmenta inclinatae: erunt et rectae, quae segmentorum sumtorum extrema cum eductarum rectarum terminis jungunt, inter se aequales, et aequalia terminabunt spatia, et tam ad duas eductas, quam ad duo sumta segmenta aequaliter inclinatae erunt.

§. 105.

Theor. IV. Si duo triangula basin basi in directum sitam habeant, et duo latera duobus lateribus, alterum alteri, aequalia, et angulum angulo aequalem, qui est ad verticem (seu basi subtenditur); sive ad easdem, sive ad diversas rectae, in qua bases sunt, partes constituta sint illa triangula: habebunt et basin basi aequalem, et ipsa inter se aequalia erunt, et bina latera aequalia aequalibus ad bases angulis inclinabuntur.

Fig. 40. a. c. Habeant triangula A B C, D C E basin B C basi C E in directum sitam; sive ad easdem, sive ad diversas rectae B E partes constituta; et habeant alterutrum latus A B vel A C alterutri D C vel D E aequale, et reliquum quoque latus reliquo aequale; et angulum B A C angulo C D E aequalem, qui sunt anguli ad vertices A, D, seu subtenduntur basibus B C, C E. Cum autem basium termini B, E sint exteriores, terminus C interior et communis utrique basi: sumi potest aut latera exterioribus terminis B, E adjacentia lateribus, quae interiori termino C adjacent, altera alteris aequalia esse, latus quidem A B lateri D C, latus vero D E lateri A C; aut latera, quae exterioribus terminis adjacent, inter se aequalia esse, et quae interiori termino adjacent, item aequalia. nempe latus A B lateri D E, et latus A C lateri D C: qui sunt casus duo.

§. 106.

Fig. 40, a. Cas. I. Sit ergo praeter reliqua, quae supra dicta sunt, latus A B lateri D C, et latus A C lateri D E aequale. Erit et basis B C basi

C E aequalis, et triangulum A B C triangulo C D E, et angulus A B C angulo D C E, et angulus A C B angulo D E C; qui quidem sunt anguli, quibus aequalia latera ad bases inclinantur.

§. 107.

Cas. II. Sit jam praeter reliqua, quae supra dicta sunt, latus A B lateri D E, et latus A C lateri D C aequale. Erit et basis B C basi C E aequalis, et triangulum A B C triangulo D C E, et angulus A B C angulo D E C, angulus A C B angulo D C E: qui sunt bini anguli, quibus bina aequalia latera ad basin inclinantur. *Fig. 40, b. c.*

§. 108.

Hic posterior casus sic quoque potest enuntiari: Si e duobus punctis ad easdem aut diversas partes rectae terminatae sitis ad duo ejus extrema (ex altero nempe puncto ad alterum extremum) et ad aliud punctum in ipsa sumtum binae rectae ductae sint, quarum tam duae priores, quam duae posteriores inter se aequales sint, et priores cum posterioribus aequales comprehendant angulos: recta illa terminata in sumto puncto bifariam secta erit, et quae ejus segmentis insistunt triangula a binis ductis terminata, aequalia erunt, et tam duae priores, quam duae posteriores ductae aequaliter ad duo segmenta inclinabuntur.

§. 109.

Prior autem Casus sic:

Si e puncto aliquo extra rectam terminatam sumto ad unum ipsius extremum et ad punctum in-

termedium in ipsa sumtum ductae duae rectae. duabus ex alio puncto, sive ad easdem sive ad diversas partes sumto, ad idem punctum intermedium et ad reliquum extremum ductis rectis aequales sint. altera alteri, ducta nempe ad extremum ex utrovis puncto ductae ad intermedium ex reliquo puncto: erit recta terminata in illo puncto intermedio bifariam secta, et triangula duobus segmentis insistentia aequalia erunt, et angulus, quem recta ex utrovis puncto ad extremum ducta cum uno segmento facit, aequalis erit angulo, quem recta ex altero puncto ad intermedium punctum ducta cum reliquo segmento facit.

§. 110.

Theor. V. Si duo triangula bases quidem in eadem recta linea sic sitas habeant, ut sit ipsis ejus rectae segmentum commune; sive ipsa ad easdem, sive ad diversas illius rectae partes constituta sint; latera autem duo duobus aequalia habeant, alterum alteri, et angulum angulo aequalem, qui basi opponitur: habebunt et basin basi aequalem, et ipsa triangula erunt aequalia, et anguli ad bases, alter alteri, aequales erunt, ii, quibus aequalia latera ad bases inclinantur.

Fig. 41. Habeant triangula A B C, D E F bases B C, E F in eadem linea recta, cujus ipsa aut ad easdem aut ad diversas partes constituta sint, et sit basibus segmentum E C commune; habeant autem alterutrum laterum B A, A C alterutri laterum E D, D F aequale, et reliquum latus reliquo aequale; et angulos quoque, qui basibus opponuntur ad A, D, aequales. Cum autem termini basium duo B et F sint

exteriores, duo E et C interiores; sumi potest, aut bina latera exterioribus terminis adjacentia binis lateribus, quae interioribus terminis adjacent, aequalia esse, latus quidem B A aequale E D, latus autem D F aequale A C: aut latera inter se aequalia esse tam ea, quae duobus exterioribus, quam quae duobus interioribus terminis adjacent; nempe B A aequale F D, et A C aequale D E: qui sunt Casus duo.

§. 111.

Cas. I. Sit ergo, manentibus ceteris supra dictis, primo quidem latus B A aequale lateri E D, et latus A C aequale lateri D F. Erit et basis B C basi E F aequalis, et triangulum A B C triangulo DEF aequale, et angulus ABC angulo DEF aequalis, quibus aequalia latera A B, DE ad bases inclinantur; itemque angulus ACB angulo DFE aequalis, quibus aequalia latera AC, D F ad bases inclinantur. *Fig. 41, a.*

§. 112.

Cas. II. Sit secundo, manentibus ceteris supra dictis, latus B A lateri F D, et latus A C lateri D E aequale. Erit basis B C basi E F aequalis, et triangulum A B C triangulo D E F aequale, et angulus A B C angulo D F E aequalis, quibus aequalia latera AB, DF ad basin inclinantur; pariterque angulus ACB angulo DEF. *Fig. 41, b. c.*

§. 113.

Theor. VI. Si duo triangula bases quidem in eadem recta linea sitas habeant, sic ut inter ipsas interjaceat segmentum illius rectae neutri basi commu-

ne; sive ad easdem, sive ad diversas illius rectae partes constituta sint; latera autem duo duobus aequalia habeant, alterum alteri, et angulum angulo aequalem, qui est ad verticem: habebunt et basin basi aequalem, et ipsa triangula erunt aequalia, et anguli, quibus aequalia latera ad bases inclinantur, aequales erunt.

Fig. 42, a. b. β. Habeant triangula A B C, D E F bases B C, E F in eadem recta linea, cujus ipsa ad easdem aut diversas partes constituta sint; et inter ipsas interjaceat illius rectae segmentum C E, neutri basi commune; et habeant alterutrum laterum B A, A C alterutri E D, D F aequale, et angulum ad verticem A angulo ad verticem D aequalem. Casuum autem distinctio et reliqua explanatio eadem erit quae Prop. praec.

§. 114.

Alia enuntiatio.

Quae tribus praecedentibus Propp. (Theor. **IV, V, VI.**) continentur, sequenti quoque comprehendentur enuntiatione.

Si duae rectae ex uno puncto exeuntes et in eo facientes angulum, et duae aliae ex alio puncto exeuntes, duabus prioribus, altera alteri, aequales, et aequalem priori angulo facientes angulum, extremis suis tangant eandem expositam rectam (sive ad easdem, sive ad diversas illius rectae partes sita sint illa duo puncta): aequalia erunt expositae rectae segmenta intercepta a duabus prioribus et a duabus posterioribus, et aequalia spatia ab utrisque contenta, et aequales anguli,

quibus binae utrarumque aequales ad expositam rectam inclinantur, ii scilicet, qui sunt ad partes reliquarum binarum aequalium.

§. 115.

Vel si ad expositam rectam infinitam e duobus punctis extra ipsam sumtis, sive ad easdem sive ad diversas ejus partes sitis, binae rectae ductae sint, quarum duae ex uno puncto ductae duabus ex altero puncto ductis, altera alteri, sint aequales, et aequalem comprehendant angulum: duae priores et duae posteriores aequalia intercipient expositae rectae segmenta, et aequalia continebunt spatia, et utraelibet aequales ductae aequaliter ad expositam inclinatae erunt ad partes reliquarum ductarum.

§. 116.

Vel si alicui expositae rectae infinitae in duobus ejus punctis insistant rectae aequales, et ab earum extremis aliae duae rectae ad expositam demissae cum prioribus aequalem comprehendant angulum, et ipsae quoque inter se aequales sint: insistentes cum demissis aequalia intercipient rectae expositae segmenta, et aequalia continebunt spatia, et tam insistentes quam demissae aequalibus ad expositam angulis iis, qui sunt ad partes alternarum ex ipsis, inclinatae erunt.

§. 117.

Theor. VII. Si rectae alicui terminatae in puncto utcumque sectae, ad easdem vel ad diversas partes, constituantur duae rectae, una in alterutro rectae extremo, aequalis sumto alterutri ipsius segmento, alte-

ra in alterutro sumti segmenti extremo aequalis toti rectae, sub aequalibus angulis, eo quem prior cum recta initio dicta, et quem posterior cum segmento sumto facit: rectae duae, quae a prioris constitutae termino ad reliquum totius rectae extremum, quaeque a posterioris constitutae termino ad reliquum sumti segmenti extremum ducuntur, inter se aequales erunt, et aequalia terminabunt triangula, et aequales facient angulos, tum quem tota recta, quemque constituta posterior subtendunt, tum quem segmentum sumtum, quemque constituta prior subtendunt.

Fig. 43, a—d. Sit recta terminata A B in puncto C utcumque secta, et ejus segmentum A C: et rectae quidem A B sumatur aut extremum A aut extremum B, segmenti vero A C sumatur aut extremum A aut extremum C.

§. 118.

Fig. 43, a. Cas. I. Si rectae A B extremum A, et segmenti A C item extremum A sumatur, et in rectae A B extremo A constituatur A D aequalis segmento A C: in segmenti A C extremo eodem puncto A constituta primo recta sub angulo isti aequali ad easdem partes, hoc est, eodem, secundum rectam A D cadet; sitque A E aequalis A B. Junctae igitur D B et E C aequales erunt, et terminabunt triangula A D B, A E C aequalia, et facient angulum A D B angulo A C E aequalem, quos subtendunt recta A B et constituta posterior A E; et angulum A E C angulo A B D aequalem, quos subtendunt segmentum A C et constituta prior A D.

Si vero A D prior constituatur ut ante, et altera A E constituatur ad alteras partes, sub angulo C A E aequali angulo B A D, et aequalis toti A B: junctae D B, E C rectae erunt rursus aequales, et reliqua, ut prius.

§. 119.

Cas. II. Sumatur rectae A B extremum A, et segmenti A C extremum C, et constitutae sint sub angulis aequalibus B A D, A C E, sive ad easdem sive ad diversas partes, A D quidem aequalis A C; C E vero aequalis A B: junctae D B, E A aequales erunt, et terminabunt triangula A D B, A E C aequalia, et facient angulum A D B angulo C A E, et angulum A E C angulo A B D aequales. *Fig. 43, b.*

§. 120.

Cas. III. Sumatur rectae A B extremum B, segmenti A C extremum A; et constitutae sint sub angulis aequalibus A B D, C A E, sive ad easdem sive ad diversas partes, B D quidem aequalis A C, A E vero aequalis A B: junctae rectae D A, E C erunt aequales, et terminabunt triangula A D B, A E C aequalia, et facient angulum A D B angulo A C E, et angulum A E C angulo **B A D** aequales. *Fig. 43, c.*

§. 121.

Cas. IV. Sumatur rectae **A B** extremum **B**, segmenti **A** C extremum C; et constitutae sint sub angulis aequalibus **A B D**, **A C E**, sive ad easdem sive ad diversas partes, **B D** aequalis **A C**, *Fig. 43, d.*

et C E aequalis A B. Junctae D A, E C aequales erunt, et terminabunt triangula A D B, A E C aequalia, et facient angulum A D B angulo C A E, et angulum A E C angulo B A D aequalem.

§. 122.

Theor. VIII. Si sit aliqua recta exposita, et alia ipsi in directum adjecta; et sub aequalibus ad ipsas angulis ad easdem vel diversas partes constitutae sint duae rectae, una quidem in alterutro expositae extremo, aequalis adjectae; altera autem in alterutro adjectae extremo, aequalis expositae: rectae, quae a termino prioris constitutae ad reliquum expositae extremum, quaeque a termino posterioris constitutae ad reliquum adjectae extremum ducuntur, aequales erunt, et aequalia terminabunt triangula, et aequales facient angulos angulis eum, qui exposita, ei, qui constituta posteriori subtenditur, et eum, qui adjecta, ei, qui constituta priori subtenditur.

Fig. 44, a—c. Sit recta exposita A B, et ei in directum adjecta B C; et sumatur expositae A B extremum A aut B, itemque adjectae B C extremum B aut C. Fient Casus quatuor sequentes.

§. 123.

Fig. 44, a. Cas. I. Sumatur expositae A B extremum A, et adjectae B C extremum B. Igitur in A et B constitutae sint, ad easdem vel diversas partes, sub angulis B A D, C B E aequalibus, A D quidem aequalis B C, B E vero aequalis B A. Junctae rectae D B, E C aequales erunt, et terminabunt triangula A D B, B E C aequalia, et facient angulum A D B

angulo B C E, et angulum B E C angulo A B D aequalem, quorum nempe illi exposita A B et constituta posteriori B E, hi adjecta B C et constituta priori A D subtenduntur.

§. 124.

Cas. II. Sumatur expositae A B extremum A, et adjectae B C extremum C, et ipsis ad easdem aut diversas partes constituantur sub angulis B A D, B C E aequalibus, A D aequalis adjectae B C, et C E aequalis expositae A B; erunt junctae D B, E B aequales, et terminabunt triangula A D B, B E C aequalia, et facient angulum A D B angulo C B E, et angulum B E C angulo A B D aequales. *Fig. 44, b.*

§. 125.

Cas. III. Sumatur expositae A B extremum B, et adjectae B C item extremum B; et ipsis ad easdem aut diversas partes constituantur sub angulis A B D, C B E aequalibus, B D adjectae B C, et B E expositae A B aequales: junctae rectae A D, C E aequales erunt, et terminabunt triangula A D B, B E C aequalia, et facient angulum A D B angulo B C E, et angulum B E C angulo B A D aequalem. *Fig. 44, c.*

§. 126.

Cas. IV. Si expositae A B extremum B, et adjectae B C extremum C sumatur: is casus reducitur ad primum; considerando C B ut expositam, et B A ut adjectam; quia sic extremum C fit extremum expositae non commune utrique rectae; B vero extremum adjectae id, quod utrique rectae commune est: qui erat Cas. I.

§. 127.

Sed non opus erit Casu 4to, sed trium Casuum enumeratio sufficiet, si pro dissimili rectarum A B, B C denominatione inducatur similis, sic enuntiando:

Si duae rectae expositae sint in directum sitae. et ipsis ad easdem aut diversas partes constitutae sint in alterutro utriusque extremo et sub angulo ad utramque aequali rectae aequales alternis illis expositis: rectae ab utriusque constitutae termino ad reliquum ejus, ad quam constituta est. extremum ductae aequales erunt. et aequalia terminabunt triangula, et aequales facient angulos, alterum alteri, eos, quos expositae subtendunt. iis, quos alternae constitutae subtendunt.

Fig. 44, d. Sint rectae duae expositae A B, B C, in directum sitae; et quum earum extremum quidem B sit commune. extrema vero A et C non communia; sumi poterunt aut utriusque extrema non communia A et C; aut unius quidem non commune A, alterius vero commune B; aut utriusque commune B. Qui erunt Casus supra expositi I, II, III.

§. 128.

Theor. IX. Si in aliqua recta terminata sumta sint duo puncta intermedia. et ipsi ad easdem aut diversas partes constitutae sint duae rectae. una quidem in alterutro totius rectae extremo, aequalis segmento inter puncta duo intermedia intercepto; altera in alterutro puncto intermedio, aequalis toti rectae; constitutae autem sint sub angulis aequalibus, eo quem prior ad rectam initio dictam, posterior ad segmentum dictum faciunt: erunt rectae, quae a termino prioris constitutae ad reliquum totius extremum, quaeque a ter-

mino posterioris ad reliquum punctum intermedium ducuntur. aequales; et aequalia terminabunt triangula; et aequalem facient angulum eum, qui a tota recta, ei, qui a posteriori constituta subtenditur; et eum, qui a segmento, ei, qui a priori constituta subtenditur.

Sit recta terminata A B, et in ea sumta duo puncta intermedia C, D. Jam sumto totius A B extremo utrovis, punctorum intermediorum aut quod illi propius, aut quod remotius est, sumi poterit: unde erunt Casus duo. *Fig. 45. a. b.*

§. 129.

Cas. I. In puncto extremo A et in puncto intermedio ipsi propiori C, ad easdem vel diversas rectae A B partes, constitutae sint A E aequalis segmento C D, et C F aequalis toti A B, sub angulis B A E, D C F aequalibus: junctae rectae E B, F D aequales erunt, et terminabunt triangula A E B, C F D aequalia; et facient angulum A E B angulo C D F, et angulum C F D angulo A B E aequales. *Fig. 37, a.*

§. 130.

Cas. II. In puncto extremo A et in intermedio ab ipso remotiori D, ad easdem aut diversas rectae A B partes, constitutae sint A E quidem segmento C D; D F vero toti A B aequalis; sub angulis B A E, C D F aequalibus: junctae rectae E B, F C aequales erunt, et terminabunt triangula A E B, C F D aequalia; et facient angulum A E B angulo D C F, angulum vero C F D angulo A B E aequalem. *Fig. 45, b.*

§. 131.

Theor. X. Si in exposita recta aliqua terminata duo puncta, unum in ipsa, alterum in producta, sumta sint, et ipsi sive ad easdem sive ad diversas partes constitutae sint duae rectae; una quidem in alterutro expositae rectae extremo, aequalis segmento inter duo sumta puncta intercepto; altera autem in alterutro sumtorum punctorum, aequalis expositae rectae; constitutae autem sint sub angulis aequalibus, quem prior cum recta exposita, posterior cum segmento dicto facit: erunt rectae duae a termino prioris constitutae ad reliquum expositae extremum; et a termino posterioris constitutae ad reliquum sumtorum punctorum ductae inter se aequales; et aequalia terminabunt triangula; et facient angulos angulis, tum eum qui ab exposita, ei qui a posteriori constituta, tum eum qui a segmento dicto, ei qui a priori constituta subtenditur, aequales.

Fig. 46, a–c. Sit recta exposita terminata A B, et in ipsa quidem sumtum sit punctum C, in producta autem punctum D; et ipsi sive ad easdem sive ad diversas partes constitutae sint duae rectae, una quidem in puncto A aut B, aequalis segmento C D; altera vero in puncto C aut D, aequalis expositae A B; sintque anguli, quem prior constituta cum A B, posterior cum C D facit, aequales. Tum si a termino ejus, quae in alterutro extremo expositae A B constituta est, ad reliquum ejus extremum, itemque a termino ejus, quae in alterutro segmenti C D extremo constituta est, ad reliquum ejus extremum rectae ducantur; eae inter se aequales erunt, et aequalia ter-

minabunt triangula, et facient angulum, quem exposita A B subtendit, aequalem ei, quem posterior constituta subtendit; itemque angulum, quem segmentum C D subtendit, aequalem ei, quem prior constituta subtendit.

§. 132.

Casus erunt quatuor: constitutae enim duae erunt aut in A et C aut in A et D, aut in B et C, aut in B et D. Sed quartus casus reducitur ad primum, considerando D C ut expositam. et punctum B ut in ipsa, punctum A ut in producta sumtum. Sed hac quarti casus enumeratione et ad primum reductione supersedebitur, si propositio ipsa aliquanto generalius enuntietur sic, ut rectarum A B, C D denominatio, cum illic dissimilis sit, similis fiat; in hunc modum:

Si expositae sint duae rectae terminatae in eadem recta linea, habentes commune segmentum; et ipsis ad easdem aut diversas partes constitutae sint duae rectae in alterutro utriusque extremo et sub angulo ad utramque aequali aequales alternis ipsis expositis: quae a termino utriusque expositae ad reliquum extremum ejus, ad quam constituta est, ducuntur rectae, aequales erunt, et aequalia terminabunt triangula, et aequales facient angulos angulis, alterum alteri, eos, quos expositae subtendunt, iis quos alternae constitutae subtendunt.

Sint expositae rectae duae A B, C D, in eadem recta linea, habentes segmentum B commune. Cum igitur earum extrema A et D sint non communia, B et C vero communia: sumi poterunt aut puncta utri-

usque non communia A et D; aut unius non commune, alterius commune, ut A et C (vel D et B); aut utriusque communia B et C. Casus igitur erunt tres tantum (cum non opus sit, secundum in duos dividere; sed quod pro sumtis A et C valet, valeat et pro sumtis D et B).

§. 133.

Fig. 46. a. Cas. I. In extremo A rectae A B, et extremo D rectae C D, quae sunt extrema non communia, ad easdem vel diversas partes, et sub angulis aequalibus B A E, C D F, constitutae sint A E aequalis C D, et D F aequalis A B: junctae rectae E B, F C aequales erunt, et terminabunt triangula A E B, C F D aequalia, et facient angulum A E B angulo D C F, et angulum C F D angulo A B E aequalem.

§. 134.

Fig. 46, b. Cas. II. In extremo A rectae A B, quod non commune est, et extremo C rectae C D, quod commune est, ad easdem vel diversas partes, et sub angulis aequalibus B A E, D C F, constitutae sint rectae A E, C F, illa aequalis C D, haec aequalis A B: junctae E B, F D aequales erunt, et terminabunt triangula A E B, C F D aequalia, et facient angulum A E B angulo C D F, et angulum C F D angulo A B E aequales.

Et similiter, si sumatur rectae C D extremum D non commune, et rectae A B extremum B commune.

§. 135.

§. 135.

Cas. III. In rectae A B exremo B, et rectae C D extremo C, quae sunt communia, ad easdem vel diversas partes, constitutae sint sub angulis aequalibus A B E, D B F rectae B E aequalis C D, et C F aequalis A B: junctae rectae E A, F D aequales erunt, et triangula terminabunt aequalia A E B, C F D, et facient angulum A E B angulo C D F, et angulum C F D angulo B A E aequalem. *Fig. 46, c.*

§. 136.

Potest propositio sic quoque enuntiari:

Si in recta aliqua sumta sint duo puncta intermedia, et ipsi ad easdem vel diversas partes constitutae sint sub aequali ad segmenta inter alterutrum totius extremum et remotius ab ipso intermedium punctum intercepta angulo et in alterutro horum segmentorum extremo rectae aequales alternis illis segmentis: rectae, quae terminos utriusque constitutae cum ejus, ad quam constituta est, reliquo extremo jungunt, inter se aequales erunt, et aequalia terminabunt triangula, et facient angulos angulis, alterum alteri, aequales eos, quos sumta segmenta subtendunt, iis, quos alternae constitutae subtendunt.

Sit recta A D, et in ea sumta duo puncta intermedia C, B; et ipsi ad easdem vel diversas partes constitutae sint sub aequali ad segmenta A B, et D C, (quae inter totius extremum A et remotius punctum intermedium B, itemque *Fig. 46, a-c.*

inter totius extremum D et remotius ab eo punctum intermedium C intercepta sunt,) angulo et in alterutro horum segmentorum extremo A aut B, itemque C aut D, rectae alternis illis segmentis, nempe segmento D C et segmento A B, altera alteri, aequales. His ita factis, rectae, quae a termino ejus, quae in extremo segmenti A B constituta est, ad reliquum ipsius extremum ducitur, quaeque a termino ejus, quae in extremo segmenti C D constituta est, ad reliquum ipsius segmentum ducitur, aequales erunt, etc.

§. 137.

Theor. XI. Si in recta aliqua terminata duo sumta sint puncta intermedia, et ipsi ad easdem vel diversas partes constitutae sint duae rectae, facientes angulum angulo aequalem, quem cum segmentis inter alterutrum rectae illius extremum et punctum intermedium illi propius interjectis in alterutris horum segmentorum terminis comprehendunt, et aequales alternis illis segmentis: erunt rectae, quae terminum prioris constitutae cum reliquo prioris segmenti termino, et terminum posterioris constitutae cum reliquo posterioris segmenti termino jungunt, inter se aequales, et aequalia terminabunt triangula, et aequales facient angulos angulis, alterum alteri, eos quos dicta segmenta subtendunt, iis, quos constitutae alternae subtendunt.

Fig. 47, a–c. Sit recta terminata A B, et in ipsa sumta duo puncta intermedia C, D, et ipsi ad easdem aut diversas partes constitutae sint duae rectae facientes angulum angulo aequalem, quem cum segmentis A C et B D in alterutris horum segmento-

rum terminis comprehendunt, et aequales alternis illis segmentis. Erunt autem aut in duobus punctis A, B constitutae, quae sunt extrema totius rectae; aut in uno extremo et ab ipso remotiori intermedio A et D (vel B et C), aut in duobus intermediis C et B.

§. 138.

Cas. I. In rectae A B extremis A et B ad easdem aut ad diversas partes ipsi constitutae sint sub angulis aequalibus C A E, D B F recta A E aequalis segmento D B, et recta B F, aequalis segmento A C. Junctae rectae E C, F D aequales erunt, et terminabunt triangula A E C, D B F aequalia, et facient angulum A E C angulo B D F, et angulum D F B angulo A C E aequales. *Fig. 47, a.*

§. 139.

Cas. II. In rectae A B extremo A et intermedio ab ipso remotiori D, ad easdem aut diversas partes, ipsi constitutae sint sub angulis aequalibus C A E, B D F recta A E segmento D B, et recta D F segmento A C aequales. Junctae rectae E C, F B aequales erunt, et aequalia terminabunt triangula A E C, D F B, et facient angulum A E C angulo D B F, et angulum D F B angulo A C E aequales. *Fig. 47, b.*

Similiter si rectae duae constituantur in extremo B et intermedio remotiori C.

§. 140.

Cas. III. In duobus punctis intermediis C et D in recta A B sumtis, ad easdem aut diversas partes, constitutae ipsi sint duae rectae C E, *Fig. 47, c.*

DF sub angulis aequalibus ACE, BDF; recta quidem CE aequalis DB, recta vero DF aequalis AC. Junctae rectae EA, FB aequales erunt, et terminabunt triangula AEC, DFB aequalia, et facient angulum AEC angulo DBF, et angulum DFB angulo CAE aequalem.

§. 141.

Theor. XII. Si rectae jungenti extrema duarum rectarum expositarum angulum comprehendentium in directum adjecta sit recta aequalis alterutri expositarum, et huic ad easdem aut diversas partes insistat in alterutro ipsius termino recta reliquae expositarum aequalis sub angulo aequali angulo dicto: recta, quae terminum insistentis cum reliquo adjectae termino, et ea quae extrema duarum expositarum jungit, aequales erunt, et aequalia terminabunt triangula, et aequales facient angulos, alterum alteri, eos, qui ab adjecta et ab insistente subtenduntur, iis, qui ab expositis, quibus illae aequales sunt, subtenduntur.

Fig. 48, a–d. Sint rectae duae expositae BA, AC facientes angulum in A, et rectae earum extrema jungenti BC adjecta sit in directum CD aequalis alterutri expositarum BA aut AC; et huic in alterutro ipsius termino C aut D insistat recta reliquae expositae aequalis sub angulo aequali angulo BAC, sive ad easdem sive ad diversas rectae BD partes. Erunt Casus quatuor.

§. 142.

Fig. 48, a. Cas. I. Adjecta CD sit aequalis remotiori expositae AB, et ipsi in puncto C insistat CE aequalis reliquae expositae AC sub angulo

DCE aequali BAC; et jungatur recta ED. Erunt rectae ED, BC aequales, et aequalia terminabunt triangula ECD, BAC, et facient angulum CED, quem subtendit adjecta CD, aequalem angulo ACB, quem subtendit recta AB, cui aequalis est CD, itemque angulum CDE, quem subtendit insistens CE, aequalem angulo ABC, quem subtendit AC, cui aequalis est CE.

§. 143.

Cas. II. Adjecta CD rursus sit aequalis expositae AB, et huic in puncto D, sive ad easdem sive ad diversas partes, insistat recta DE reliquae expositae AC aequalis sub angulo CDE aequali angulo BAC; jungaturque recta EC. Erunt rectae EC, BC aequales, et aequalia terminabunt triangula EDC, BAC, et facient angulum CED angulo ACB, et angulum DCE angulo ABC aequales. *Fig. 48, b.*

§. 144.

Cas. III. Adjecta CD sit jam propior expositae AC aequalis, et huic primo in C insistat ad easdem aut diversas partes CE aequalis reliquae expositae AB sub angulo DCE aequali BAC; jungaturque ED. Erunt rectae ED, BC aequales, et terminabunt triangula BAC, CED aequalia, et facient angulum CED angulo ABC, et angulum CDE angulo ACB aequales. *Fig. 48, c.*

§. 145.

Cas. IV. Adjecta CD rursus sit aequalis AC, et jam ei in D ad easdem aut diversas partes insistat ipsi AB aequalis DE sub angulo CDE *Fig. 48, d.*

aequali B A C; et jungatur E C. Erunt rectae E C, B C aequales, et aequalia terminabunt triangula C E D, B A C, et facient angulum D E C angulo A B C, et angulum D C E angulo A C B aequalem.

§. 146.

Theor. XIII. Si a trianguli duo latera inaequalia habentis latere uno, ipso aut producto, abscissum sit segmentum vertici adjacens reliquo lateri aequale, et in eodem vertice, sive ad easdem prioris lateris partes, ad quas est triangulum, sive ad diversas, constituta sit recta basi aequalis faciens cum priori latere angulum aequalem ei, quem prius latus subtendit: recta a constitutae termino ad segmenti abscissi extremum ducta aequalis erit priori lateri, et triangulum terminabit priori triangulo aequale, et cum constituta quidem angulum faciet aequalem ei, quem posterius latus subtendit, cum segmento autem abscisso aequalem angulo ad verticem.

§. 147.

Fig. 49, *a—c.* Cas. I. Sit triangulum A B C habens latera A B, A C inaequalia, et a latere A B, quod primo majus sit latere A C, abscindatur A D aequalis A C; et in vertice A, sive ad easdem lateris A B partes, ad quas est triangulum A B C, sive ad diversas, constituta sit recta A E basi B C aequalis sub angulo B A E aequali ei A C B, quem latus A B subtendit. Ducta recta E D (e constitutae termino E ad segmenti dicti extremum D) aequalis erit priori lateri A B, et terminabit triangulum A E D aequale triangulo A B C, et faciet angulum A E D an-

gulo A B C, quem latus A C subtendit, angulum vero A D E angulo ad verticem B A C aequalem.

Et manifestum est, Casu, quo constituta est recta A E ad easdem ipsius A B partes, ad quas est triangulum; si quidem cadat A E extra triangulum, esse angulum D A E, hoc est (per construct.) A C B majorem B A C; sin intra cadat, esse minorem; si denique secundum ipsam A C incidat, esse angulum D A E, hoc est A C B, aequalem B A C.

Et hinc vicissim; si quidem sit angulus A C B major B A C, cadet A E extra triangulum; sin minor, cadet intra; sin aequalis, cadet secundum ipsam A C.

§. 148.

Cas. II. Sit jam A C major A B, et a producta A B abscindatur A D aequalis A C. Reliqua manent ut supra. *Fig. 49, α. β. γ.*

§. 149.

Theor. XIV. Si a trianguli duo habentis latera inaequalia, latere uno ipso vel ultra verticem producto, abscissum sit segmentum basis extremo adjacens aequale reliquo lateri; et ad idem segmentum in eodem basis extremo, sive ad easdem, ad quas est triangulum, sive ad diversas partes, constituta sit sub angulo aequali angulo trianguli, qui est ad reliquum basis extremum, recta basi aequalis: ducta ab hujus termino ad segmenti abscissi terminum recta erit aequalis priori lateri trianguli, et terminabit triangulum priori triangulo aequale, et cum constituta faciet angulum aequalem ei, qui est ad prius basis extremum,

angulo, cum segmento autem abscisso aequalem angulo ad verticem prioris trianguli.

Fig. 50. a. b. Sit triangulum A B C, habens latera A B, A C inaequalia, et ab latere B A ipso, si majus; producto autem, si minus sit, abscissum sit segmentum B D aequale reliquo lateri A C; et ad idem segmentum B D in B, sive ad easdem ad quas est triangulum A B C, sive ad diversas ipsius B D partes, constituta sit recta B E aequalis basi B C sub angulo A B E aequali A C B: ducta recta D E aequalis erit A B, et terminabit triangulum BDE aequale triangulo A B C, et faciet angulum B E D angulo A B C, et angulum B D E angulo B A C aequalem.

Quod si constituta BE sit ad easdem, ac triangulum A B C, rectae B D partes; si quidem A B sit major A C: cadet BE extra angulum A B C; si vero minor: cadet B E intra angulum A B C. Sed hoc demum per Elem. I, 18. demonstrari potest.

§. 150.

Theor. XV. Si a trianguli duo habentis latera inaequalia, latere uno ipso vel ultra verticem producto, abscissum sit segmentum basis extremo adjacens aequale reliquo lateri; et ad idem segmentum in termino ejus abscisso, sive ad easdem, ad quas est triangulum, sive ad diversas partes constituta sit sub angulo aequali ei, qui priori latere subtenditur, recta aequalis basi: ducta a constitutae extremo ad dictum basis extremum recta erit aequalis priori lateri trianguli, et terminabit triangulum priori triangulo aequale, et cum constituta quidem angulum faciet aequalem ei, qui est ad dictum basis extremum; cum segmento autem

prioris lateris aequalem angulo ad verticem prioris trianguli.

Sit triangulum A B C, habens latera A B, A C inaequalia; et ab latere A B ipso, si majus; producto autem ultra A, si minus sit, abscissum sit segmentum BD aequale lateri reliquo A C; et ad idem segmentum B D in termino ejus abscisso D, sive ad easdem, ad quas est triangulum A B C, sive ad diversas partes, constituta sit recta D E aequalis basi B C sub angulo B D E aequali A C B: ducta recta E B aequalis erit priori lateri A B, et terminabit triangulum D E B aequale triangulo A B C; et faciet angulum B E D aequalem angulo A B C, angulum E B D aequalem angulo ad verticem B A C. *Fig. 51, a. b. c. et α. β. γ.*

Quod si recta E B cadit intra angulum A B C: erit angulus E B D hoc est B A C minor A B C. Si secundum B C cadit; erit angulus B A C aequalis A B C. Sin extra angulum A B C cadit (casu, quo ad easdem, ac triangulum B A C, partes constituta est); erit major.

Vicissim igitur Casu, quo constituta D E est ad easdem ad quas triangulum A B C partes, si quidem angulus B A C minor sit A B C; cadet B E intra angulum A B C: si aequalis; secundum ipsam B C cadet: si major, extra angulum A B C cadet.

§. 151.

Theor. XVI. Si punctis duobus in basi trianguli ad alterutras partes producta sumtis intercepta sit recta aequalis alterutri lateri trianguli, et ad eam in alterutro sumtorum punctorum, ad easdem triangulo aut diversas partes, constituta sit recta aequalis reliquo lateri sub angulo aequali angulo ad verticem: du-

cta a termino constitutae ad reliquum sumtum punctum recta aequalis erit basi, et terminabit triangulum aequale priori triangulo, et faciet angulos eos, qui a constituta et a postremo ducta subtenduntur, aequales angulis trianguli iis, qui a lateribus, quibus illae aequales sunt, subtenduntur, alterum alteri.

Fig. 52. Sit triangulum A B C, et in ejus basi ad partes C producta sumta sint duo puncta D, E, quibus intercepta recta aequalis sit lateri A B aut A C; et ipsi D E in alterutro puncto D vel E et ad easdem triangulo aut ad diversas partes constituta sit recta aequalis reliquo lateri sub angulo aequali angulo B A C. Tum recta a termino constitutae ad reliquum punctorum D, E ducta aequalis erit basi B C, et terminabit triangulum aequale triangulo A B C, et faciet angulos, quem recta D E et quem constituta subtendit, aequales alterutri angulorum A B C, A C B, ei nempe, quem latus illis aequale subtendit.

Similis erit propositio, si punctorum sumtorum unum sit in ipsa basi B C, alterum in ea ad alterutras partes producta: Itemque, si utrumque punctorum sumtorum sit in basi B C. Sed diversi, qui in his suppositionibus obtinent casus, non possunt sine subsequentibus demum Elementorum theorematis demonstrari.

§. 152.

Hactenus de iis Casibus egimus, ubi unum latus unius trianguli cum uno latere alterius, sive eo quod illi aequale ponitur, sive reliquo, aut cum basi in eadem recta linea situm est: nunc ponamus ea in uno extremorum suorum communi angulum facere.

§. 153.

Theor. XVII. Si quatuor rectis lineis terminatis ex eodem puncto exeuntibus, aequalis sit angulus angulo, quem utraque exteriorum cum interiori sibi propiori facit; sint autem et exteriores duae inter se aequales, et interiores: erunt et rectae, quae utriusque exterioris terminum cum propioris ipsi interioris termino jungunt, inter se aequales, et aequalia terminabunt triangula, et aequales facient angulos tam cum exterioribus; quam cum interioribus.

Sint quatuor rectae lineae terminatae A B, A C, A D, A E ex eodem puncto A exeuntes, et sit angulus B A C angulo E A D aequalis, quos exteriores A B, A E cum interioribus sibi propioribus A C, A D faciunt; et tam exteriores A B, A E aequales sint inter se, quam interiores A C, A D: erunt rectae B C, E D, quae exteriorum extrema B, E cum interiorum extremis C, D jungunt, inter se aequales, et aequalia terminabunt triangula A B C, A E D, et aequales cum duabus exterioribus facient angulos A B C, A E D, itemque cum interioribus aequales angulos A C B, A D E. *Fig. 53.*

§. 154.

Theor. XVIII. Iisdem positis; erunt et rectae, quae utriusque exterioris terminum cum interioris ab ipsa remotioris termino jungunt, inter se aequales, et aequalia terminabunt triangula, et aequales facient angulos tam cum exterioribus, quam cum interioribus.

Ponantur eadem, quae ad praec., et ducantur rectae B D, E C, quae exteriorum utriusque terminos B, E cum interioris ab ipsa remotioris termino D, C jungunt: eae erunt inter se aequa- *Fig. 54.*

les, et aequalia terminabunt triangula A B D, A E C, et aequales facient cum duabus exterioribus angulos A B D, A E C itemque cum duabus interioribus aequales angulos A D B, A C E.

Consequitur per El. I. 4.; assumto, quod, si anguli B A C, E A D aequales sint, addito communi angulo C A D, etiam anguli B A D, E A C aequales erunt, per Ax. 2.

§. 155.

Theor. XIX. Si quatuor rectarum terminatarum ex eodem puncto exeuntium, utraque exterior aequalis sit interiori ab ipsa remotiori; et angulus angulo aequalis sit, quem utraque exteriorum cum interiori sibi propiori facit: erunt rectae, quae utriusque exterioris extremum cum propioris interioris extremo jungunt, inter se aequales, et aequalia terminabunt triangula, et aequales angulos cum utravis exteriori et cum interiori ab ipsa remotiori comprehendent.

Fig. 55. Sint quatuor rectae lineae ex eodem puncto A exeuntes A B, A C, A D, A E, quarum utraque exterior aequalis sit interiori ab ipsa remotiori, A B quidem aequalis A D, A E vero aequalis A C; et sit angulus B A C aequalis angulo E A D, quos exterior utraque A B, A E cum interiori sibi propiori A C, A D facit. Erunt rectae B C, E D, quae exteriorum utriusque extrema B, E cum propioris interioris extremis C, D jungunt, inter se aequales; et aequalia terminabunt triangula A B C, A D E; et aequalem facient angulum A B C angulo A D E, quem cum exteriori A B et cum interiori ab ipsa remotiori A D comprehendunt; pariterque angulum A E D aequalem angulo A C B.

§. 156.

Theor. XX. Si quatuor rectarum terminatarum ex eodem puncto exeuntium utraque exterior aequalis sit propiori sibi interiori; et quem cum ea comprehendit angulum, unum alteri aequalem faciat: rectae, quae exteriorum terminos cum interiorum remotiorum terminis jungunt, aequales erunt, et aequalia terminabunt triangula, et aequales facient angulos, quos cum exterioribus, iis, quos cum interioribus ipsis propioribus faciunt.

Sint quatuor rectae A B, A C, A D, A E, quarum exterior A B aequalis sit interiori propiori A C, itemque A E aequalis A D; et faciant angulum B A C aequalem angulo E A D. Erunt rectae B D, C E aequales, et aequalia terminabunt triangula A B D, A C E, et facient angulum A B D angulo A C E aequalem, itemque angulum A E C angulo A D B. *Fig. 56.*

Consequitur per I, 4., assumto eo, quod si anguli B A C, D A E sint aequales, addito communi C A D, erunt et toti B A D, C A E aequales, per Ax. 2dum.

§. 157.

Theor. XXI. Si duae rectae expositae angulum facientes aequales sint, et constitutae sint ad unam quidem earum in ipso puncto, in quo angulum faciunt, ad alteram vero in ipsius extremo duae rectae inter se aequales et sub aequalibus angulis: e prioris constitutae extremo ad prioris expositae terminum, et e posterioris constitutae extremo ad punctum, quod est vertex dicti anguli, ductae duae rectae aequales erunt,

et aequalia terminabunt triangula, et tam cum duabus constitutis, quam cum duabus expositis aequales facient angulos.

Fig. 57. Sint duae expositae aequales angulum facientes A B, A C, et constitutae sint ad ipsam quidem A B in A recta A D, ad ipsam vero A C in C recta C E inter se aequales, et sub angulis aequalibus B A D, A C E: junctae rectae B D, A E aequales erunt, et terminabunt triangula A B D, A C E aequalia, et aequales facient angulum B D A angulo A E C, et angulum D B A angulo E A C.

§. 158.

Theor. XXII. Si duae rectae angulum facientes aequales sint, et ad eas in ipsarum terminis constitutae sint duae rectae aequales sub aequalibus angulis: quae ab constitutarum terminis ad punctum, in quo est dictus angulus, ducuntur duae rectae, invicem aequales erunt, et aequalia terminabunt triangula, et aequales tam cum prioribus rectis, quam cum constitutis facient angulos.

Fig. 58. Sint duae rectae angulum facientes A B, A C, et ad eas in ipsarum terminis B, C constitutae sint rectae B D, C E aequales, et sub angulis aequalibus A B D, A C E: junctae rectae A D, A E aequales erunt, et aequalia terminabunt triangula A B D, A C E, et facient angulos cum ipsis A B, A C aequales D A B, E A C; itemque cum constitutis B D, C E angulos aequales A D B, A E C.

§. 159.

Theor. XXIII. Si expositae duae rectae terminatae faciant angulum, et ad ipsas constitutae sint,

ad unam quidem in ipso anguli vertice, ad alterum vero in ipsius extremo, duae rectae sub aequalibus angulis et alternis expositis aequales: quae a termino prioris constitutae ad extremum prioris rectae, et a termino posterioris constitutae ad anguli verticem ducuntur rectae; aequales erunt, et aequalia terminabunt triangula, et earum alterutra cum exposita sibi propiore angulum faciet aequalem ei, quem reliqua exposita subtendit.

Sint expositae rectae A B, A C terminatae facientes angulum in A; et constitutae sint ad rectam quidem A B in A recta A D aequalis A C, ad rectam vero A C in C recta C E aequalis A B, sub angulis B A D, A C E aequalibus: junctae rectae D B, E A aequales erunt, et aequalia terminabunt triangula A B D, A C E, et erit angulus D B A, quem D B cum exposita B A facit, aequalis angulo A E C, quem reliqua exposita A C subtendit; itemque angulus E A C aequalis angulo B D A. *Fig. 59.*

§. 160.

Theor. XXIV. Si expositae duae rectae terminatae faciant angulum, et ad ipsas in extremis suis constitutae sint sub angulis aequalibus rectae alternis expositis aequales: quae a terminis constitutarum ad dicti anguli verticem ducuntur rectae, aequales erunt, et aequalia terminabunt triangula, et alterutra earum cum exposita sibi propiore aequalem faciet angulum ei, quem reliqua exposita subtendit.

Sint expositae duae rectae A B; A C terminatae, facientes in A angulum: et ad ipsas in extremis suis B, C constitutae sint sub angulis *Fig. 60.*

discentis cujusque illam animi facultatem, cujus in geometricis primae partes sunt, διανοίας ab antiquis philosophis nominatae, ut legimus apud Proclum et alios. Quae si tum, cum provectior est, delectatur continuando ad res novas et varias progressu, et fundamenti jam solidi compos superstruere gaudet aedificium disciplinae: sub ipsa tamen initia utiliter detinebitur labore, pauca quaedam vel unum etiam aliquid vehementer inculcandi, secundum illud illustris philosophi praeceptum: in principiis diu haerendum esse.

Itaque totus hujus tractationis usus non tam discendi materiam, quam rationem ac formam spectat. Quippe omnia hujusce Capitis, ut et illi, theoremata nil aliud fere dicunt, quam quod ipsa Euclidis quarta seu ejus Theorema primum proponit: vel potius minus continent; quia omne effatum universale plus in se continet, quam singularia, quae illi subsunt. Sed hoc egimus, ut haberet tiro, in quo se exerceret, eandem rem in tanta circumstantiarum, quae fortuitae sunt, varietate toties recurrentem agnoscendo, contemplando, et quod didicit universale, ad singularia transferendo. Triangula enim bina habentia tres in se res illas, quae constituunt hypotheses vel, si mavis ita dicere, unam hypothesin propositionis Euclideae quartae, consideravimus pluribus modis variata; cum laterum ipsorum varias inter se positiones sumeremus, et ex iis positionibus varie combinatis varias efficeremus figuras: deinde in qualibet harum figurarum inveniendum erat, quae essent consequentia illa, quae in propositione quarta universim enuntiantur: praetereaque ad singulas illas figuras quaerenda erat apta rerum denominatio, et propositionum enuntiatio perspicuis verbis com-

prehendenda. In quo varietatem rursus aliquam secuti sumus in Cap. II. et III., cum in IIdo quidem a figura et hypothesibus circa ipsam initio facto, ad eruenda ea, quae essent hypothesibus consequentia per prop. 4tam, et ad inveniendam postea denominationem et enuntiationem progrederemur; in IIItio autem Theorematum enuntiationes proponeremus, expositionem et in multis, ubi opus erat, divisionem in Casus subjungeremus: ut in illo tiro invenientis, in hoc discentis magis partes agat.

Constat igitur haec exercitatio quatuor fere vel quinque partibus, quae singulae proprias mentis operationes requirunt. Prima pars versatur in combinandis vario modo laterum binorum triangulorum positionibus; ex qua combinatione multiplices illae figurae exstiterunt, quas hoc et praec. Capite proposuimus: altera in enumerandis casibus, qui in multis horum theorematum, in hoc praesertim Capite, distinguendi erant, alias duo, alias tres aut quatuor: ubi id agendum, ut et plena sit enumeratio, ne quis Casus praetermittatur, et stricta, nihil habens superflui, quale fit, cum alii casus aliis continentur. Tertia pars in eo consistit, ut in figuris jam factis agnoscat tiro duo triangula habentia hypotheses 4tae, nempe duo latera duobus aequalia, et angulum comprehensum aequalem; intelligat ergo adesse in materia singulari substrata aliquid, quod sub generali illo, quod jam mente perceptum habet, comprehensum et subjectum sit. Quarta pars, ut concludat, ubi hypotheses adsunt, consequentia quoque adesse; nempe quibus triangulis insint illa, quae diximus, aequalia, iis inesse et reliqua, quae in quarta Euclidis consequentia pronun-

tiantur, aequalia, hoc est, bases aequales, et ipsa triangula, et reliquos angulos. Quinta pars, ut ad unamquamque singularium figurarum tum hypotheseos, tum consequentium inveniretur apta quaedam in verbis denominatio, atque ita tota res enuntiatione comprehenderetur perspicua, determinata, in qua nec deesset quicquam necessarii, nec abundaret, quo careri posset.

Sed in hac figurarum per varias combinationes congerendarum et enumerandarum mentione venit in mentem ejus instituti, quod persecutus est Joseph Schmidt, unus ex doctoribus in schola Pestalozziana Ebrodunensi, in libro suo *„Die Elemente der Form und Grösse (gewöhnlich Geometrie genannt) nach Pestalozzi's Grundsätzen bearbeitet. I., II. Theil.* 1809." ubi combinando varios linearum ductus et inter se complicationes sic agit, tamquam omnes figurarum texturas, in quibus geometria versari possit, exhaurire conetur. In quo conatu duo statim errores apparent: primo, quod geometricae contemplationis varietatem figurarum, quas proponit, varietate metiri videtur, cum illa multo magis ab hypotheseon, quae sola mente, quam a figurarum, quae oculis cernuntur, varietate pendeat; sed in quamvis paucis et simplicibus figuris hypotheseon varietas fere infinita sit; ut in duobus triangulis, etsi vel solam linearum rectarum, angulorum et arearum aequalitatem vel inaequalitatem spectes: quemadmodum ex iis, quae hoc opusculo continentur, exemplis, in quibus praeterea hypotheses ad unum duntaxat Euclidis theorema primum referuntur, abunde apparebit. Deinde quod, quo ordine figurae obtinentur secundum aliquam combinationum methodum, eundem ordinem et in proprie-

tatibus figurarum demonstrandis servandum putat, ea gratuita et a vero prorsus aliena opinio est; cum in demonstrationum serie persaepe fiat, ut simplicissimis figuris aliae longe magis complicatae et pluribus partibus compositae praemittendae sint, ex methodi didacticae legibus. Sed quod caput rei erat, demonstrandi dico artificium, notionum perspicuitatem, demonstrationum robur, ratiocinandi vim in tirone usu et exercitatione per gradus confirmandam; quarum rerum vel maxime rationem haberi oportebat ab homine paedagogicis Pestalozzii principiis nixo et reformatam geometriae docendae methodum pollicente; in his ille rebus tam negligenter versatus est et tam parum vidit, ut passim in primis statim doctrinae illius initiis eas res, in quibus difficile non sit luce parata uti, confusione notionum et caligine oppleverit.

Nostrae igitur, quas his duobus Capitibus usurpavimus, figurarum combinationes prorsus restrictae sunt ad hypotheses unius definiti theorematis, primi, inquam, Euclidei. Non enim ut figurarum varietas oculis, sed in utcumque simplicibus aut compositis figuris ut menti ad operationem sufficiens et apta materia suppeditetur, hoc Geometriam discentium interest. Quod his duobus Capitibus exsequi exorsi sumus in re per se satis simplici, duobus triangulis; cum ad primum, quod de illis agit, theorema applicandum proponeremus varios illorum triangulorum situs et complicationes. Nunc alia ratione institutum persequemur.

CAPUT IV.

Problemata, quorum effectio immediate ex applicatione Propositionis quartae Elementorum procedit.

§. 161.

In duobus superioribus Capitibus ex theoremate theoremata deduximus; ex uno quidem, quod est Euclidis Elementorum primum, plura sub illo comprehensa et speciales tantum generalioris propositionis casus referentia: quae tota exercitatio, uti diximus, hanc maxime vim habet, primo ut, qui sensum propositionis rite perceptum habeant tyrones, eam deinceps crebra applicatione memoriae inculcent; deinde ut eas, quae in propositione generatim nominantur, hypotheses, etiam ubi singularibus quibusdam conditionibus, circumstan-

tiis et προςδιορισμοις quasi obvolutae sunt, agnoscere consuescant, singularia illa seponendo, et sola ea, quae ad rem sunt, retinendo.

Sed alter amplus aperitur campus applicationi theorematum, cum ad problemata devenitur, alteram palmariam architecturae geometricae partem. Ut enim theoremata enuntiant aliquid ita esse, ut dicitur: sic problemata quaestionem movent de re aliqua facienda, et fieri posse docent, ac quomodo. Et ut theorematum plerumque ea forma est, ut si sit aliquid vel sint aliqua, simul cum iis esse etiam alterum aliquid vel alia aliqua, pronuntient: sic in problematis plerisque, dato aliquo vel datis aliquibus, ostenditur, aliquid aliud vel aliqua alia inveniri et effici posse. Quomodo autem theorema aliquod proponendi et efficiendi problematis occasionem praebere possit, facile sic intelligetur. Quoniam theorema dicit, posito quodam, vel positis quibusdam pluribus, quae antecedentia dicimus, consequens esse aliquid, vel plura quaedam esse consequentia: sequitur, ut si efficere velimus id, quod illic est consequens vel unum ex consequentibus, efficere oporteat id, quod illic est antecedens, vel si plura fuerint, ea aut omnia, aut, si forte aliqua jam in datis sint, reliqua: quo facto et consequens effectum habebitur. Ut si datum sit triangulum, et requiratur alterum ipsi aequale, cujus tamen latus datum sit aequale uni duorum laterum prioris, et angulus illi lateri adjacens datus sit aequalis ei, qui a dictis duobus dati trianguli lateribus comprehenditur: oportebit alterum latus dicto angulo adjacens facere aequale reliquo dictorum dati trianguli laterum; et duorum laterum extremis conjunctis linea recta, habebitur triangulum

dato aequale; id quod quaerebatur. Sic uni theoremati prop. 4tae respondent quatuor sequentia Problemata.

§. 162.

Problema I. Dato triangulo et datis duabus rectis comprehendentibus angulum uni angulorum illius trianguli aequalem, una quidem terminata et aequali uni laterum trianguli dictum angulum comprehendentium, altera vero infinita; oporteat ab extremo terminatae ad infinitam ducere rectam, quae aequalis sit basi trianguli dati.

Datum sit triangulum A B C, et datae duae rectae D E, D F comprehendentes angulum E D F aequalem angulo B A C; D E quidem terminata et aequalis lateri A B; D F vero infinita: oporteat ab extremo E rectae D E terminatae ad infinitam D F ducere rectam E G, quae aequalis sit basi B C. *Fig. 61.*

Id sic efficietur: Ab infinita D F abscindatur D G aequalis A C, et ducatur recta E G: ea erit, quae quaeritur: aequalis enim erit basi B C per prop. 4tam.

§. 163.

Problema II. Datis iisdem, quae in praecedente; oporteat ab extremo datae terminatae ad infinitam ducere rectam, quae terminet triangulum aequale triangulo dato.

Dentur eadem, quae prius: et ex E ducenda sit ad D F recta, quae terminet triangulum aequale triangulo A B C.

Abscissa D G aequali A C, juncta E G rursus praestabit propositum: faciet enim triangulum D E G aequale triangulo dato A B C, per prop. 4tam.

§. 164.

Problema III. Rursus iisdem datis, quae in praecedentibus; oporteat ab extremo datae terminatae ad infinitam ducere rectam, quae cum terminata faciat angulum aequalem ei quem dictum trianguli dati latus cum basi comprehendit.

Dentur eadem, quae prius; et ex puncto E ad infinitum D F ducenda sit recta, quae cum recta D E faciat angulum aequalem angulo A B C.

Id rursus efficietur, abscissa D G aequali A C ducendo rectam E G. Sic enim erit angulus D E G aequalis angulo A B C, per prop. 4tam.

§. 165.

Problema IV. Rursus iisdem datis; oporteat ab extremo datae terminatae ad infinitam ducere rectam, quae ad infinitam inclinetur angulo interno aequali ei angulo trianguli dati, qui dicto angulo opponitur.

Dentur eadem. quae prius: et ex puncto E ad infinitam D F ducenda sit recta, quae ad D F inclinetur angulo interno (hoc est, ad easdem partes, ad quas est punctum D, jacente) aequali angulo A C B.

Iisdem quae in praec. factis, recta E G satisfaciet problemati Per prop. 4tam enim crit angulus D G E aequalis angulo A C B; quod erat faciendum.

§. 166.

Accidit autem in problematibus, ut alia unam tantum solutionem admittant, alia duas vel plures vel etiam infinitas. Quippe ipsum postulatum secundum

(cum postulatorum similis in quibusdam ratio sit ac problematum: hoc enim commune habent, quod aliquid fieri jubent) postulatum igitur, rectam finitam continue in directum producere, dupliciter fieri potest: data enim recta A B utrinque finita in extremis A et B, tam ad partes extremi A, quam ad partes extremi B produci potest: Et si quidem ad partes A produci jubeatur, id uno tantum modo fieri potest; similiterque, si ad partes B: Si vero simpliciter produci jubeatur; id ad utrasvis partes fieri potest, ergo duplici modo. Rursus ad Propositionem III, quae et tertium problema tradit, ubi a majori data recta segmentum minori datae aequale abscindi jubetur, si non additum sit, utri majoris extremo illud segmentum adjacere oporteat; dupliciter res fieri potest, cum utrilibet extremo adjacens abscindi queat. Et ad Prop. I. seu Probl. I., triangulum aequilaterum super data recta finita describendum ad utrasvis hujus rectae partes, ergo et ipsum duplici modo describi potest; quem exhibet Euclidea constructio duas praebens circulorum intersectiones, quarum utraque pro vertice trianguli describendi usurpari potest. Ad secundam vero propositionem seu Probl. II., plures solutiones praebet ipsa Euclidea construendi ratio: quum primo ducta recta A B, triangulum super hac aequilaterum describi ad utrasvis ipsius partes possit; ex quo ceteris ita, ut jubet Euclides, factis, duae obtinebuntur rectae ad punctum A positae aequales datae B Γ (in fig. textus graeci); deinde loco rectae A B, recta A Γ duci possit, et super hac rursus duobus modis triangulum aequilaterum construi, et hinc pariter duae aliae rectae, quae propositum praestent, inveniri

Fig. 1.

queant; ut per haec jam habeantur quatuor. Sed praeterea patet, inventa una, qualis est A $\varDelta$, infinitas alias inveniri posse, centro A radio A $\varDelta$ describendo circulum, et ad ejus circumferentiam ex A ducendo rectas quotcumque, quae omnes proposito satisfacient. Ceterum Euclidi ad efficiendum problema III., cui probl. II. pro praeparatione et subsidio inservit, satis erat, ut in probl. IIdo unam quamcumque invenire doceret: quare de reliquis pluribus aut etiam innumeris nihil opus fuit addere.

Paullo aliter res se habet de Probl. I. Triangulum enim aequilaterum super data recta utras ad partes describatur, non debet in sequentibus, ubi ejus usus est, omnino indifferens censeri: etsi enim indifferens est in 2da prop., non tamen in 9a; in qua triangulum aequilaterum super $\varDelta$ E (v. fig. Eucl. ad prop. 9) oportet non ad utraslibet, sed ad eas nominatim rectae $\varDelta$ E partes construi, ad quas non situm est punctum A vel triangulum A $\varDelta$ E: ibi itaque supponitur prop. Ia hoc sensu intelligenda, ut super data recta non ad utrascumque saltim partes, nihil ut intersit, sed ad utras visum fuerit illius partes, seu ad partes assignatas describi possit triangulum aequilaterum. Sic et ad demonstrationem prop. 24ae, angulus ad rectam E $\varDelta$ (v. fig. illius prop.) in puncto $\varDelta$ aequalis angulo B A Γ constituendus est non ad utrascumque rectae $\varDelta$ E. partes, sed ad eas duntaxat, ad quas est punctum Z vel triangulum E $\varDelta$ Z: ibi igitur requiritur talis problematis in prop. 23. tradita solutio, qua angulus ad assignatas rectae datae partes constituatur: cujus effectio requirit et problema prop. 22ae hoc sensu solutum, ut triangulum e rectis,

quae tribus datis aequales sint, constituatur super exposita recta ⊿ E (fig. prop. 22.) non ad utrascumque, ut indifferens sit, sed ad utras jussum fuerit, seu ad assignatas ejus partes.

§. 167.

Haec obiter annotanda duximus, ut ad generalem et elementarem problematum theoriam pertinentia: simul quod non alienum visum est, hic statim monere de differentia quadam propositorum supra (§. 162 — 165.) quatuor problematum: eam dico, quod ex illis secundum quidem et tertium unam tantum solutionem admittit, seu unam tantum rectam, quae problemati satisfacit: quod quidem ita esse, postmodum ex ipsis prop. 4ae consectariis (§. 240. 263.) manifestum fiet: similiterque et quartum unam tantum solutionem admittit; quod tamen ita esse per I, 16. demum ostendi potest: primum vero illorum problematum varios casus habet, et aliis unam solam, aliis duas solutiones recipit; quod tamen per ea demum, quae post prop. 26. tradita sunt in Chrestomath. geom. pag. 321. sq., explicari potest.

§. 168.

Patet autem, si aliquid, quod fieri requiritur, pluribus modis possit effici; id ut minus multis modis effici queat, futurum esse, si, quod prius simpliciter requirebatur, jam adjuncta nova aliqua conditione vel determinatione fieri requiratur. Ut in superiori exemplo, ad datum punctum datae alicui rectae aequales rectae innumerae possunt poni; sed si adjiciatur, ut ponenda recta in datae alicujus rectae directionem ca-

dat, vel per aliud datum punctum transeat, una tantum potest, aut ad summum duae. Itaque augendo numero conditionum, determinationum vel datorum, minuitur numerus modorum, quibus problema effici potest, seu solutiones ad pauciores restringuntur; minuendo contra conditionum numero, vel omittendo aliqua datorum, fit, ut plures existant solutionum modi et forte innumeri.

§. 169.

Est igitur in plerisque problematis numerus quidam conditionum, requisitorum, datorum, justus et sufficiens, ac talis, ut, si ea omnia adsint, problema sit quam maxime fieri possit determinatum, et unius tantum solutionis aut saltim quam paucissimarum capax: si vero aliqua desint, multo plurium aut etiam innumerarum: si denique aliqua abundent, ne unius quidem; sed prorsus fieri nequeat, nisi inter ipsa data certa et peculiaris intercedat relatio. Sed de hoc tertio genere, de iis, inquam, quae plus quam determinata vocari solent problemata, hic non est dicendi locus: Duorum autem priorum utrum sit facilius ad efficiendum, non difficile erit judicatu. Certe enim paucioribus satisfacere conditionibus vel requisitis, facilius est quam pluribus: et qui pluribus potest, eo ipso potest paucioribus; qui vero paucioribus, nondum idcirco etiam pluribus: etsi forte facultas paucioribus satisfaciendi viam aliquando munire possit ad satisfaciendum pluribus; et alias quoque faciliora aditum ad difficiliora saepe patefaciunt. De quibus nonnulla adhuc dicenda sunt.

§. 170.

Primum igitur, qui pluribus requisitis scit satisfacere, per id ipsum paucioribus quoque scit: et qua quis arte problema efficit tot habens data, quot habere, et non amplius, debet; eadem arte efficiet paucioribus propositum datis, cum ea, quae deficiunt, pro lubitu assumere et ipse sibi dare possit. Item si quis efficere potest aliquid cum adjuncta aliqua conditione propositum; is idem etiam efficere posse dicetur simpliciter et sine illa conditione propositum; cum eam conditionem ipse ultro adjungere possit; artis autem ejusdem sit. sive praescriptae sive sponte sumtae conditioni satisfacere. Ut si triangulum aequilaterum super recta data construere potest; potest et omnino triangulum aequilaterum construere: rectam enim super qua, nisi dederis, ipse sumet quamcumque. Pariter si triangulum aequicrus habens angulos ad basin singulos duplos ejus, qui ad verticem, describi potest ad crus datum: potest et effici problema simpliciter enuntiatum: Triangulum aequicrus describere habens angulum ad basin utrumque duplum anguli ad verticem: quod ita proponit Euclides Lib. IV. prop. 10., et ad crus pro lubitu assumtum construit. Et in toto quarto Libro quodvis eorum, quae de inscribendis circulo figuris sunt, problematum sic proponi poterat, ut ea figura unum angulorum suorum habeat in dato circumferentiae puncto; itemque de circumscribendis figuris, ut figura uno latere circulum in dato circumferentiae puncto contingat: sed Euclides eam conditionem non adjicit. Similiter ad I, 42. problema sic proponi poterat: Dato triangulo aequale parallelogram-

mum sub dato angulo constituere, et quidem super semisse basis (vel unius laterum) dati trianguli: sed hoc rursus non adjungit. Qui enim rem aliquam imperatam efficit assumto aliquo, quod ipsi integrum et liberum est assumere: quidni eam efficere dicatur simpliciter?

§. 171.

Alterum erat, quod supra diximus: cum sit problematum magis per certa data et conditiones determinatorum et restrictorum difficilior effectio, quam eorum, quae minus conditionibus adstricta sunt et pauciora habent data, ad quae constructio accommodanda sit; fieri tamen posse, ut effectio minus determinatorum ad effectionem magis determinatorum subsidio et adjumento sit. Quod quidem non est infrequens, sed latissime patet in problematum geometricorum solutione; ut inter subsidia artis inveniendi numerari merito debeat. Frequenter enim usu venit, ut, si problematis alicujus solutio cognita sit praestans id, quod imperatur, uno modo quocumque, vel rem singulari aliquo casu effectam dans, talis deinde solutio inserviat et in subsidium vocetur ad problematis magis restricti seu cum quibusdam προςδιορισμοις propositi solutionem, vel ad alios problematis generaliter enuntiati casus solvendos. Cujus rei statim exemplum praebet problema Euclidis secundum, in quo recta datae rectae aequalis ad datum punctum poni docetur: cum id inserviat ad solutionem sequentis tertii, quod adjunctam habet conditionem, ut ea recta situm etiam determinatum nanciscatur, nempe ab alia data, ut minor a majori, abscindatur. Sic et prop. 42a 1mi, quae

dato triangulo parallelogrammum aequale sub dato angulo unum quodcumque constituere docet, idque praestat nominatim super semissi basis dati trianguli; praeparationem et subsidium exhibet ad solvendum problema 44ae, qua parallelogrammum illud super data recta constitui, seu ad datam rectam applicari jubetur. Et est hujus rei prorsus vulgaris usus in ea Analyseos geometricae parte, quae in problematis versatur *διορισμον* maximum vel minimum habentibus: in his enim perpetuum est, ut compositio ejus casus, qui *διορισμῳ* respondet, praemittatur, et ipsius ope reliquorum casuum compositio perficiatur.

§. 172.

Jam prioris generis (§. 170.) exemplum habebimus in quatuor problematis supra (§. 162 — 165.) traditis, si ea simplicius proposuerimus et minus determinata, omissa scilicet una conditionum seu uno datorum, quae illic addita erant; longitudinem dico rectae D E. Sic erit

Problema V. (respondens problemati I.) Datis duobus angulis rectilineis aequalibus, et intra unum ipsorum ducta recta duabus rectis ipsum comprehendentibus intercepta: huic aequalem rectam ducere intra alterum angulum, rectis hunc comprehendentibus interceptam.

Dati sint duo anguli rectilinei aequales BAC, EDF, et intra unum eorum BAC ducta sit BC: oporteat intra alterum EDF ducere rectam rectis ED, DF interceptam ipsi BC aequalem. *Fig. 62.*

Ab recta DE abscindatur DG, aequalis AB; ab DF autem DH aequalis AC; et jungatur GH; erit ea aequalis BC per prop. 4tam. Ducta ergo est intra

angulum E D F recta ipsis D E, D F intercepta G H aequalis B C: quod erat faciendum.

Problema VI. (respondens Problemati II.) Datis iisdem quae in proxime praecedente; intra alterum angulum ducere rectam, quae triangulum terminet aequale ei, quod prior ducta terminat.

Data sint eadem, quae prius: et oporteat intra angulum E D F ducere rectam, quae triangulum terminet aequale triangulo A B C.

Iisdem quae in praecedenti factis, erit triangulum D G H aequale triangulo A B C. Ducta ergo est intra angulum E D F recta G H terminans triangulum aequale triangulo A B C: q. e. f.

Problema VII. (respondens Probl. III. et IV.) Datis iisdem, quae prius; intra alterum angulum ducere rectam, quae ad unam assignatam rectarum ipsum comprehendentium aequali angulo interno, ac prior ducta ad unam rectarum priorem angulum comprehendentium, inclinetur.

Data sint eadem quae prius: et oporteat intra angulum E D F ducere rectam, quae ad rectam D E inclinetur angulo interno aequali angulo A B C.

Abscissis D G aequali A B, et D H aequali A C, ac juncta G H, erit angulus D G H aequalis angulo A B C, per prop. 4tam. Ergo intra angulum E D F ducta est recta G H, quae ad rectam D E inclinatur angulo interno aequali angulo A B C; q. e. f.

Habes cujusque ex his tribus problematis solutionem aliquam, sed unam tantum ex innumeris, quas admittunt. Quod enim rectam D G sumsimus aequalem A B; id non necesse est: nam si major etiam vel minor sumatur D G, tamen ipsi potest, plurimis saltim

ca-

casibus inveniri respondens D H, et duci recta G H, quae imperatum faciat: sed tunc posteriores Elementorum propositiones adhibendae sunt: quare hic ei rei non immoramur.

§. 173.

Hactenus tradita Problemata respondent theoremati Propos. 4tae generatim, vel potius in triangulis a se invicem sejunctis proposito. Nunc ad ea veniamus, quae respondeant variis ejus ad triangula latus commune habentia applicationibus, quas sistunt theoremata Capite IIdo ad quaestiones I — V. tradita: quae simili ratione, ac de ipso Theoremate prop. 4tae modo ostendimus, ad problemata transferri poterunt. Ac statim Theoremati I. (§. 32.) respondebunt problemata haec quatuor:

Problema VIII. Dato angulo rectilineo et linea recta ipsum bifariam secante terminata, cujus ex termino ad crus unum recta ducta sit: ex eodem termino ad crus alterum rectam ducere, quae priori ductae aequalis sit.

Datus sit angulus B A C, et recta ipsum bifariam secans terminata A D, cujus ex termino D ad crus unum A B ducta sit recta D E: oporteat ex eodem termino D ad crus alterum A C ducere rectam ipsi D E aequalem. *Fig. 63.*

Capiatur A F aequalis A E, et jungatur D F: ea aequalis erit D E per prop. 4tam. Ducta ergo est ex termino D ad crus A C recta D F ipsi D E aequalis: quod erat faciendum.

Problema IX. Datis iisdem, quae prius; ex eodem termino ad crus alterum ducere rectam, quae

triangulum terminet aequale ei, quod prior ducta terminat.

Data sint eadem quae prius; et oporteat a termino D ad alterum crus A C ducere rectam, quae triangulum terminet aequale triangulo A E D.

Capiatur A F aequalis A E, et jungatur D F: ea solvet problema: facit enim (per prop. 4.) triangulum A D F aequale triangulo A D E; quod facere oportebat.

Problema X. Datis iisdem, quae prius: ad eundem terminum ponere rectam, quae cum recta angulum bifariam secante aequalem angulum ac prior ducta, ad alteras partes comprehendat.

Data sint eadem, quae prius; et oporteat ad punctum D ponere rectam, quae cum recta A D ad alteras partes comprehendat angulum aequalem angulo A D E.

A crure A C abscindatur A F aequalis A E, et jungatur D F; et per prop. 4tam erit angulus A D F aequalis angulo A D E. Posita ergo est ad punctum D recta D F faciens cum A D angulum A D F aequalem angulo A D E; quod facere oportuit.

Problema XI. Datis iisdem, quae prius: ex eodem termino ad crus alterum demittere rectam sub angulo interno (seu ad partes verticis anguli dati) aequali ei, quo prior recta ad crus prius inclinata est.

Data sint eadem quae prius: et oporteat a puncto D ad crus A C demittere rectam sub angulo interno (seu ad partes verticis A anguli B A C) aequali angulo A E D.

Fiat A F aequalis A E, et jungatur D F: ea faciet angulum D F A aequalem angulo D E A, per prop. 4tam; atque ita satisfacit proposito.

§. 174.

Eidem Theoremati I. (§. 32.) respondebunt alia quatuor theoremata sequentia:

Problema XII. Datis duabus rectis lineis aequalibus facientibus angulum, quem bifariam secet recta intermedia, et ab unius aequalium extremo ad intermediam ducta recta: oporteat ex alterius aequalium extremo ad intermediam ducere rectam priori ductae aequalem.

Datae sint duae rectae aequales A B, A C, facientes angulum B A C, quem bifariam secet recta intermedia A D; et ex unius aequalium extremo B ad intermediam A D ducta sit linea recta B E: oporteat ex alterius extremo C ad eandem A D ducere rectam aequalem priori ductae B E. *Fig. 64.*

Jungatur C E: dico factum. Est enim recta C E ex puncto C ad A D ducta, aequalis ipsi B E, per prop. 4tam.

Problema XIII. Datis iisdem, quae prius: oporteat ex alterius aequalium extremo ad eandem intermediam ducere rectam, quae aequale terminet triangulum ei, quod prior ducta terminat.

Data sint eadem, quae prius; et oporteat ex puncto C ad rectam A D ducere rectam, quae triangulum terminet aequale triangulo A B E.

Ducatur recta C E: dico factum. Est enim C E recta ex puncto C ducta ad rectam A D, et terminat triangulum A C E aequale triangulo A B E, per prop. 4tam.

Problema XIV. Datis iisdem, quae prius: oporteat ex alterius aequalium extremo et ad easdem ipsi-

us partes, ad quas est intermedia, ducere rectam, quae cum ipsa, ex cujus termino ducitur, angulum comprehendat internum aequalem ei, quem prior ducta cum priori aequalium comprehendit.

Data sint eadem, quae prius; et ex puncto C ad easdem rectae A C partes, ad quas est A D, oporteat ducere rectam facientem cum A C angulum aequalem angulo A B E.

Jungatur recta C E: dico factum. Est enim ex C ducta recta C E, ad quas imperatum est rectae A C partes, et facit angulum A C E aequalem angulo A B E per prop. 4tam.

Problema XV. Datis iisdem, quae prius; oporteat ex alterius aequalium extremo ad eandem intermediam ducere rectam, quae cum intermedia aequalem comprehendat angulum ei, quem prior ducta cum ipsa comprehendit.

Data sint eadem, quae prius: et ex puncto C ad A D ducenda sit recta, cum ipsa A D faciens angulum aequalem angulo A E B.

Jungatur recta C E: dico factum. Est enim recta C E ex C ducta ad A D, et facit angulum A E C aequalem angulo A E B, per prop. 4tam.

§. 175.

Longum foret, varietates omnes theorematum, quae ad Quaestiones sex Capitis IIdi allata sunt, respondentibus etiam problematis persequi: etsi hoc tale sit, ut in eo utiliter se exercere possit tyronis ingenium et industria. Nonnulla tamen et praecipua illorum theorematum hic ad problemata transferemus.

Theoremati igitur IIIo (§. 36.) sequentia respondebunt Problemata.

Problema XVI. Dato angulo linea recta bifariam secto, et puncto in uno illius crurum: ex hoc puncto ducere rectam ad crus alterum, quae et ipsa bifariam secetur recta illa angulum bifariam secante.

Detur angulus B A C bifariam sectus recta A D, et in crure A B detur punctum B: oporteat ex puncto B ad crus A C ducere rectam, quae bifariam secetur recta A D. *Fig. 65.*

A crure A C abscindatur A E aequalis A B, et jungatur B E: ea proposito satisfaciet; in puncto enim F, in quo rectae A D occurrit, bifariam ab ipsa secabitur per El. prop. 4tam vel §. 36.

Problema XVII. Datis iisdem; ex hoc puncto demittere rectam perpendicularem ad rectam illam angulum bifariam secantem.

Dentur eadem, quae prius: et oporteat ex puncto B ad rectam A D demittere perpendicularem.

A crure A C abscindatur A E aequalis A B, et jungatur recta B E, quae ipsam A D secet in F: dico rectam B F ex B ad rectam A D perpendicularem demissam esse. Sequitur id ex prop. 4ta El. et Def. 10. vel propius ex Theoremate III. §. 36.

Problema XVIII. Datis iisdem; ex hoc puncto ducere rectam ad crus alterum, quae aequalia faciat triangula terminata duobus ipsius segmentis ab recta angulum bifariam secante factis.

Dentur eadem, quae prius; et ex puncto B ad crus A C oporteat ducere rectam, cujus duobus seg-

mentis ab recta A D factis terminentur triangula aequalia.

Rursus abscissa ab crure A C recta A E aequali A B, juncta recta B E satisfaciet proposito: aequalia enim erunt, quae duobus ejus segmentis ab recta A D factis B F, F E terminantur triangula A B F, A E F, per El. prop. 4. vel Theor. III. §. 36.

§. 176.

Quin et sequens addi potest, etsi superfluum habeat datum, convenienter iis, quae §. 36. observata sunt.

Problema XIX. Datis iisdem, quae prius: ex hoc puncto ducere rectam ad crus alterum, quae cum duobus cruribus faciat angulos internos aequales.

Dentur eadem, quae prius: et ex puncto B ad crus A C ducenda sit recta, quae cum duobus cruribus A B, A C faciat angulos internos aequales.

Rursus abscissa ab crure A C recta A E ipsi A B aequali, juncta B E recta praestabit propositum: faciet enim angulos, quos cum duobus cruribus facit, internos A B E, A E B aequales, per El. prop. 4. vel per ea, quae § 36. annotata sunt.

Superfluum hic datum erat recta A D angulum B A C bifariam secans; tale tamen, quod non faciat problema magis determinatum, quam si absit. Dari enim et talia possunt, quae ad solutionem nihil prorsus valeant, neque prosint neque obsint.

§. 177.

Theorematibus ad Quaestionem secundam Cap. II. propositis §. 43 — 46., haec respondebunt:

Problema XX. Datae rectae insistat alia recta perpendicularis terminata, et ex hujus extremo ad illam ducta sit linea recta: oporteat ex eodem extremo ad eandem, ad alteras quidem perpendicularis partes, ducere rectam priori ductae aequalem.

Data sit recta A B et ipsi perpendicularis C D, cujus ab extremo C ad rectam A B ducta sit recta C E: oporteat ab eodem extremo C ad rectam A B, et ad alteras quidem perpendicularis C D partes (seu ad segmentum D B, si C E ducta fuerit ad segmentum D A) ducere lineam rectam ipsi C E aequalem. *Fig. 66.*

Abscindatur ab D B recta D F aequalis D E, et jungatur C F: ea erit ipsi C E aequalis: quod consequitur ex hypothesi cum Def. 10. Lib. I. El. per prop. 4. El.; vel et per §. 43.

Problema XXI. Datis iisdem, quae prius: oporteat ex eodem extremo ad eandem, et ad alteras perpendicularis partes, ducere rectam, quae terminet triangulum aequale ei, quod prior ducta terminat.

Dentur eadem, quae prius: et oporteat ex puncto C ad D B ducere rectam, quae terminet triangulum aequale triangulo C E D.

Abscindatur D F aequalis D E, et ducatur C F: ea faciet triangulum C F D aequale triangulo C E D, per El. I, def. 10. et prop. 4.

Problema XXII. Datis iisdem, quae prius; oporteat ex eodem extremo ad alteras perpendicularis partes ducere rectam, quae aequalem, ac prior ducta, angulum cum perpendiculari comprehendat.

Dentur eadem, quae prius: et oporteat ex C ad alteras perpendicularis C D partes ducere rectam,

quae cum ipsa angulum comprehendat aequalem angulo D C E.

Abscissa D F aequali D E, jungatur C F: ea faciet angulum F C D aequalem angulo E C D, per El. I. Def. 10. et prop. 4.

Problema XXIII. Datis iisdem, quae prius; oporteat ex eodem extremo ad alteras perpendicularis partes ducere rectam, quae ad datam rectam aequali, ac prior ducta, angulo interno inclinetur.

Dentur eadem quae prius: et oporteat ex puncto C ad alteras perpendicularis C D partes ducere rectam, quae ad ipsam C B inclinetur angulo interno aequali angulo C E D.

Abscissa D F aequali D E, jungatur C F: ea faciet angulum C F D aequalem angulo C E D, per El. I. Def. 10. et prop. 4.

§. 178.

Et rursus haec quoque:

Problema XXIV. Ex uno datae rectae terminatae extremo ad alteram rectam, quae illam bifariam et ad angulos rectos dividit, ducta sit linea recta: oporteat ex altero prioris extremo ad eandem alteram ducere rectam priori ductae aequalem.

Fig. 67. E rectae datae A B extremo uno A ad rectam C D, quae ipsam A B bifariam et ad angulos rectos dividit, ducta sit recta A E: oporteat ex altero extremo B ad eandem C D ducere rectam priori ductae A E aequalem.

Jungatur B E: ea faciet, quod requiritur: aequalis enim erit ipsi A E per El. I. Def. 10. et prop. 4.: ducta ergo est B E ex extremo B ad rectam C D aequalis A E.

Problema XXV. Datis iisdem: oporteat ex altero prioris extremo ad eandem alteram ducere rectam, quae triangulum terminet aequale ei, quod prior ducta terminat.

Dentur eadem, quae prius: et oporteat ex puncto B ad rectam C D ducere rectam, quae triangulum terminet aequale triangulo A E C.

Jungatur B E: dico factum. Est enim ea ex B ad ipsam C D ducta, et terminat triangulum B E C, quod aequale est triangulo A E C per El. I. Def. 10. et prop. 4.

Problema XXVI. Datis iisdem: oporteat ex altero prioris extremo ad eandem alteram ducere rectam, quae cum ipsa hac, ad quam ducitur, aequalem, ac prior ducta, angulum comprehendat.

Dentur eadem, quae prius: et oporteat ex puncto B ad rectam C D ducere rectam, quae cum ipsa C D comprehendat angulum aequalem angulo A E C.

Ducatur B E: dico factum. Est enim ea ex B ducta ad C D, et cum C D recta facit angulum B E C aequalem angulo A E C, per El. I. Def. 10. et prop. 4.

Problema XXVII. Datis iisdem: oporteat ex altero prioris extremo et ad easdem ipsius partes ducere rectam, quae ad ipsam aequali, ac prior ducta, angulo inclinetur.

Dentur eadem, quae prius: et ex puncto B oporteat ad easdem rectae A B partes, ad quas A E ducta est, ducere rectam, quae ad A B inclinetur angulo aequali angulo B A E.

Ducatur B E: dico factum. Est enim illa ex puncto B ducta ad easdem ipsius A B partes, ad quas

A E, et ad A B inclinatur angulo A B E, qui aequalis est angulo B A E, per El. I. Def. 10. et prop. 4.

§. 179.

Theoremati IX. (§. 44.) respondens sic proponetur

Problema XXVIII. Ad datam rectam ad unas partes terminatam e puncto extra ipsam dato demissa sit perpendicularis: oporteat describere triangulum aequicrus, habens verticem in puncto illo dato, basin autem in priori recta jacentem, et ipsius dato uno extremo terminatam.

Fig. 68. Ad datam rectam A B in A terminatam ex puncto extra ipsam dato C demissa sit perpendicularis C D: oporteat describere triangulum aequicrus habens verticem in C, basin autem in recta A B jacentem et in ipsius dato extremo A terminatam.

Ab recta D B abscindatur D E aequalis D A, et jungantur rectae C A, C E: et triangulum C A E satisfaciet problemati: est enim aequicrus per El. I. Def. 10 et prop. 4., et verticem quidem habet in C, basin autem in A B jacentem et extremo A terminatam.

§. 180.

Theorematis ad Quaestionem tertiam Cap. II. propositis §. §. 47 — 49, haec respondebunt problemata:

Problema XXIX. Datae positione sint duae rectae in communi extremo facientes angulum, et ad idem extremum extra illum angulum posita sit recta terminata faciens cum duabus illis angulos utrinque aequales; et ex ejus termino ad unam positione data-

rum ducta sit recta linea utcumque: oporteat ex eodem termino ad alteram positione datarum ducere rectam lineam priori ductae aequalem.

Datae positione sint rectae BA, AC facientes angulum BAC, et ad punctum A recta terminata AD, faciens angulos DAB, DAC aequales; et ex ejus termino D ad unam earum AB ducta sit recta DE utcumque: oporteat ex eodem termino D ad alteram AC ducere rectam priori ductae DE aequalem. *Fig. 69.*

Ab AC abscindatur AF aequalis AE, et jungatur DF: dico factum. Erit enim ea aequalis DE per El. prop. 4.

Problema XXX. Datis iisdem; oporteat ex eodem termino ad alteram positione datarum ducere rectam, quae triangulum terminet aequale ei, quod prior ducta terminat.

Dentur eadem quae prius; et oporteat ex puncto D ad AC ducere rectam, quae terminet triangulum aequale triangulo DEA.

Abscissa AF aequali AE, et juncta DF, dico factum. Erit enim triangulum DFA aequale triangulo DEA, per El. prop. 4.

Problema XXXI. Datis iisdem; oporteat ex eodem termino ad alteram positione datarum ducere rectam, quae ad ipsam angulo inclinetur interno aequali ei, quo prior ducta ad priorem positione datam, item interno, inclinata est.

Dentur eadem quae prius; et oporteat ex puncto D ad rectam AC ducere rectam, quae ad ipsam inclinata sit angulo interno aequali angulo DEA.

Abscissa A F aequali A E, et juncta D F, dico factum: haec enim facit angulum D F A aequalem angulo D E A, per El. prop. 4.

Problema XXXII. Datis iisdem; oporteat ad eandem terminatam in eodem termino et ad alteras ipsius partes constituere angulum aequalem ei, quem prior ducta cum ipsa facit.

Dentur eadem quae prius; et oporteat ad rectam D A in termino D et ad alteras ipsius partes, quam ad quas est D E, constituere angulum aequalem angulo E D A.

Abscissa A F aequali A E, et juncta D F; dico factum: haec enim faciet angulum F D A aequalem angulo E D A, per El. prop. 4.

§. 181.

Itemque et sequentia:

Problema XXXIII. Datae sint duae rectae terminatae aequales, facientes angulum in concursu, et ad punctum concursus extra illum angulum posita sit recta faciens cum duabus illis datis angulos utrinque aequales; et ad ipsam ex unius datarum termino ducta sit recta linea utcumque: oporteat ex alterius ipsarum termino ad eandem exteriorem rectam ducere rectam priori ductae aequalem.

Fig. 70. Datae sint rectae A B, A C terminatae aequales, facientes angulum ad A, et ad punctum A extra angulum B A C posita sit recta A D faciens angulos D A B, D A C aequales, et ex unius datarum termino B ad rectam A D ducta sit recta B E utcumque: oporteat ex alterius termino C ad eandem A C ducere rectam priori ductae B E aequalem.

Jungatur C E: dico factum. Ea enim ex C ad A D ducta est, et aequalis est ipsi B E per El. prop. 4.

Problema XXXIV. Datis iisdem, quae in praecedente; oporteat ex alterius datarum aequalium termino ad eandem exteriorem ducere rectam, quae triangulum terminet aequale ei, quod prior ducta terminat.

Data sint eadem quae prius: et ex puncto C ad rectam A D oporteat rectam ducere, quae triangulum terminet aequale triangulo B E A.

Jungatur C E: dico factum. Ea enim ex C ad A D ducta est, et terminat triangulum C E A aequale triangulo B E A per El. prop. 4.

Problema XXXV. Datis iisdem; oporteat ex alterius datarum aequalium termino ducere rectam, quae cum recta exteriori comprehendat angulum internum aequalem ei, quem prior ducta cum ipsa comprehendit.

Dentur eadem, quae prius, et oporteat ex puncto C ad rectam A D ducere rectam, quae cum ipsa A D comprehendat angulum internum aequalem B E A.

Jungatur C E: dico factum. Ea enim ex puncto C ad rectam A D ducta est, et facit angulum C E A aequalem angulo B E A, per El. I. prop. 4.

Problema XXXVI. Datis iisdem; oporteat ad alteram datarum aequalium in ipsius termino et ad easdem partes constituere angulum aequalem ei, quem prior ducta cum priori datarum comprehendit.

Dentur eadem quae prius: et ad rectam A C in puncto C et ad easdem partes, ad quas est recta D A, oporteat constituere angulum aequalem angulo A B E.

Jungatur A C: dico factum. Ea enim facit angulum A C E aequalem angulo A B E, per El. I. prop. 4.

§. 182.

Ad quaestionem quartam Capitis IIdi Theoremati XXIII. (§. 59.) haec respondebunt Problemata:

Problema XXXVII. In duas rectas positione datas incidens recta linea faciat angulos alternos aequales; et per unius horum angulorum verticem et extra ipsum angulum ducta sit alia recta inter duas positione datas: oporteat et ex alterius angulorum alternorum vertice et extra ipsum angulum ducere rectam inter positione datas priori ductae aequalem.

Fig. 71. In duas rectas positione datas A B, C D incidens recta E F faciat angulos alternos A E F, E F D aequales; et per anguli A E F verticem E, sed extra illum angulum ducta sit inter positione datas alia recta E G: oporteat et ex alterius anguli E F D vertice F et extra hunc angulum ducere inter positione datas rectam aequalem priori ductae E G.

Ab E A abscindatur E H aequalis F G, et jungatur F H: ea erit aequalis E G, per El prop. 4.

Problema XXXVIII. Datis iisdem, quae prius: oporteat etiam ex alterius angulorum alternorum vertice et extra ipsum angulum ducere rectam inter positione datas, quae aequale triangulum terminet ei, quod prior ducta terminat.

Data sint eadem, quae prius: et oporteat ex puncto F, extra angulum E F D, ducere rectam inter positione datas A B, C D, quae terminet triangulum aequale triangulo E F G.

Ab E A abscindatur E H aequalis F G, et jungatur F H: ea faciet triangulum E F H aequale triangulo E F G, per El. prop. 4.

Problema XXXIX. Datis iisdem, quae prius: oporteat etiam ex alterius alternorum angulorum vertice ducere rectam lineam, quae cum incidente aequalem, ac prior ducta, et ad alteras incidentis partes angulum faciat.

Data sint eadem, quae prius: et oporteat ex puncto F ducere rectam, quae cum incidente E F, ad alteras ipsius partes, faciat angulum aequalem angulo F E G.

Ab E A abscindatur E H aequalis F G, et jungatur F H: ea faciet angulum E F H aequalem angulo F E G.

Problema XL. Datis iisdem, quae in praecedentibus, oporteat etiam ex alterius angulorum alternorum vertice, et extra ipsum angulum, ducere rectam inter duas positione datas, quae ad eam positione datam, ad quam ex angulo ducenda est, inclinetur angulo ad partes incidentis sito aequali ei, quo prior ducta ad alteram positione datam inclinata est item ad partes incidentis sito.

Data sint eadem quae prius: oporteat etiam ex puncto F inter positione datas A B, C D ducere rectam, quae ad positione datam A B inclinata sit angulo ad partes incidentis E F sito aequali angulo E G F.

Ab E A abscindatur E H aequalis F G, et jungatur F H: ea faciet angulum F H E aequalem angulo E G F, per El. prop. 4.

§. 183.

Eidem et sequentia respondebunt:

Problema XLI. Ad datam positione rectam uno in extremo terminatam et ad diversas ipsius partes

duae rectae aequales aequalibus angulis alternis inclinatae sint, una quidem in ipso ejus extremo, altera vero in alio ipsius puncto; et ex posterioris termino ad dictum extremum ducta sit linea recta: oporteat huic aequalem rectam ex prioris inclinatae termino ad datam positione rectam ducere.

Fig. 72. Sit positione data A B in extremo A terminata; et ad eam, ad diversas quidem ipsius partes, inclinatae sint duae rectae aequales A C, D E sub aequalibus angulis B A C, A D E; A C quidem in ipso extremo A, D E vero in alio ipsius A B puncto D; et ducta ex posterioris termino E ad extremum dictum A sit recta E A: oporteat ex puncto C ad rectam A B ducere rectam priori ductae E A aequalem.

Jungatur C D: dico factum. Ea enim ex puncto C ad rectam A B ducta est, et aequalis est ipsi E A, per El. prop. 4.

Problema XLII. Datis iisdem, quae prius: oporteat ex prioris inclinatae termino ad positione datam ducere rectam, quae triangulum terminet aequale triangulo ei, quod prior ducta terminat.

Data sint eadem, quae prius: et ex puncto C ad rectam A B oporteat ducere rectam, quae triangulum terminet aequale triangulo A E D.

Jungatur C D: dico factum. Ea enim ex puncto C ad rectam A B ducta est, et terminat triangulum A C D aequale triangulo A E B, per El. prop. 4.

Problema XLIII. Datis iisdem, quae prius: oporteat ad priorem inclinatam in ipsius termino constituere angulum rectilineum aequalem ei, qui in posterioris

rioris inclinatae termino ipsa et ducta priori recta comprehenditur.

Dentur eadem, quae prius; et ad rectam A C in puncto C oporteat constituere angulum aequalem angulo A E D.

Jungatur C D: dico factum. Erit enim angulus A C D aequalis angulo A E D, per El. prop. 4.

Problema XLV. Datis iisdem, quae prius: oporteat ex prioris inclinatae termino ad rectam positione datam ducere rectam lineam, quae angulum internum cum ipsa faciat aequalem ei, quem prior ducta cum eadem positione data in ipsius extremo comprehendit.

Dentur eadem, quae prius: et ex puncto C ad positione datam A B oporteat ducere rectam, quae cum illa angulum internum faciat aequalem angulo E A D.

Jungatur C D: dico factum. Ea enim ex C ad A B ducta, angulum facit C D A aequalem angulo E A D.

§. 184.

Theorematì XXIV. (§. 60.) hoc respondebit Problema (brevitatis enim causa quatuor problemata una propositione complectimur):

Problema XLVI. Rectae alicui in ipsius extremis insistant ad diversas partes duae perpendiculares, et ab uno extremo ad perpendicularem oppositam ducta sit recta quaecumque: oporteat ab altero extremo ad perpendicularem ipsi oppositam ducere rectam priori aequalem; vel quae triangulum terminet aequale ei, quod prior recta terminat; vel quae cum priori recta angulum comprehendat aequalem ei, quem prior ducta cum ipsa comprehendit; vel quae cum hac perpendiculari angulum comprehendat internum aequalem ei, quem prior ducta cum priori perpendiculari comprehendit.

Fig. 73. Rectae A B in extremis A, B ad diversas ipsius partes insistant perpendiculares A C, B D, et ab uno extremo B ad oppositam perpendicularem A C ducta sit recta quaecumque B E: oporteat ex altero extremo A ad perpendicularem B D ducere rectam, quae aequalis sit priori ductae B E; vel quae triangulum terminet aequale triangulo A B E; vel quae faciat cum A B angulum aequalen angulo E B A; vel quae cum perpendiculari B D faciat angulum internum aequalem angulo B E A.

Abscindatur a B D recta B F aequalis A E, et jungatur A F: dico factum. Ea enim et aequalis est B E, et facit triangulum B A F triangulo A B E aequale, et angulum B A F angulo A B E, et angulum A F B angulo B E A aequalem, per El. Ax. 10. et prop. 4.

Itemque hoc:

P r o b l e m a XLVII. Rectae alicui expositae in uno extremo et in alio ipsius puncto ad diversas partes insistant perpendiculares duae aequales, et a termino posterioris perpendicularis ad dictum extremum ducta sit recta: oporteat a termino prioris perpendicularis ad expositam ducere reotam priori ductae aequalem; vel quae triangulum terminet aequale ei, quod prior ducta terminat; vel quae cum exposita angulum internum faciat aequalem ei, quem prior ducta facit; vel quae cum priori perpendiculari angulum faciat aequalem ei, quem prior ducta cum posteriori perpendiculari facit.

Fig. 74. Rectae A B in ipsius extremo A et alio puncto C ad diversas partes insistant perpendiculares aequales A D, C E, et a posterioris termino E ad dictum extremum A ducta sit recta E A: oporteat a prioris perpendicularis termino D ad rectam A B du-

cere rectam, quae sit aequalis priori ductae E A; vel quae triangulum terminet aequale triangulo A E C; vel quae cum recta A B angulum internum faciat aequalem angulo E A C; vel quae cum perpendiculari A D angulum faciat aequalem angulo A E C.

Juncta D C his omnibus satis faciet: nam et aequalis erit D A, et faciet triangulum C D A aequale triangulo C E A, et angulum D C A angulo E A C, et angulum C D A angulo A E C aequalem.

§. 185.

Theorematı XXVI. (§. 62.) haec respondebunt:

Problema XLVIII. Ad rectam datam in ipsius extremis et ad diversas partes inclinatae sint duae rectae sub angulis aequalibus, et in uno extremo perpendicularis insistat oppositae inclinatae occurrens: oporteat in altero quoque extremo rectae datae perpendicularem ducere.

Ad rectam datam A B in extremis A et B inclinatae sint ad diversas partes rectae A C, B D sub angulis B A C, A B D aequalibus, et in extremo B insistat perpendicularis B E occurrens oppositae inclinatae A C in E: oporteat in altero quoque extremo A datae rectae A B perpendicularem ducere. *Fig.* 75.

Abscissa B F aequali A E jungatur A F: erit ea ad A B perpendicularis, per El. prop. 4. et Ax. 10. Def. 10.

Problema I L. Ad rectam expositam in extremo et in alio ipsius puncto ad diversas partes duae rectae aequalibus angulis alternis inclinatae sint et ipsae inter

se aequales; et ex termino posterioris inclinatae ad dictum extremum ducta recta expositae perpendicularis sit: oporteat ex prioris inclinatae termino ad expositam ducere perpendicularem.

Fig. 76. Ad expositam A B in extremo A et in alio ipsius puncto C duae rectae A D, C E aequalibus angulis alternis B A D, A C E inclinatae sint, et ipsae inter se aequales sint, et ex termino E ad A ducta E A perpendicularis sit ipsi A B: oporteat ex termino D ad expositam A B ducere perpendicularem.

Jungatur D C: erit ea perpendicularis ad A B, per El. prop. 4. et Ax. 10. Def. 10.

§. 186.

Ad Quaestionem quintam Capitis II. (§. 65.) Theoremati XXVIII. haec respondebunt Problemata:

Problema L. Ad datam rectam terminatam in ipsius duobus extremis et ad easdem partes inclinatae sint duae rectae sub angulis aequalibus, sive non secantes se invicem, sive secantes; et ab uno extremo ad oppositam inclinatam ducta sit linea recta: oporteat ex altero extremo ad oppositam ipsi inclinatam ducere rectam priori ductae aequalem.

Fig. 77. a. b. Ad datam rectam A B in duobus ejus extremis A, B, et ad easdem ipsius partes inclinatae sint rectae C A, D B sub angulis C A B, D B A aequalibus, sive non secantes se invicem (fig. a) sive secantes (fig. b); et ab uno extremo A ad oppositam inclinatam B D ducta sit recta linea A E: oporteat ex altero extremo B ad oppositam ipsi inclinatam A C ducere rectam aequalem priori ductae A E.

Ab recta A C abscindatur A F aequalis B E, et jungatur B F: ea aequalis erit A E, per El. prop. 4.

Problema LI. Datis iisdem, quae prius: oporteat ex altero extremo ad oppositam ipsi inclinatam ducere rectam, quae triangulum terminet aequale ei, quod prior ducta terminat.

Data sint eadem, quae prius: et ex puncto B ad rectam A C ducere oporteat rectam, quae triangulum terminet aequale triangulo A E B.

Ab recta A C abscindatur A F aequalis B E, et jungatur B F: ea faciet triangulum A F B aequale triangulo A E B, per El. prop. 4.

Problema LII. Datis iisdem, quae prius: oporteat ab altero extremo et ad easdem rectae datae partes ducere rectam, quae cum recta terminata aequalem, ac prior ducta, angulum comprehendat.

Data sint eadem quae prius, et ex puncto B ad easdem datae A B partes oporteat ducere rectam, quae cum data A B comprehendat angulum aequalem angulo E A B.

Ab recta A C abscindatur A F aequalis B E, et ducatur B F: ea faciet angulum F B A aequalem angulo E A B, per El. prop. 4.

Problema LIII. Datis iisdem, quae prius: oporteat ab altero extremo ad oppositam ipsi inclinatam ducere rectam, quae cum ipsa faciat angulum internum aequalem ei, quem prior ducta cum priori inclinata facit internum.

Data sint eadem, quae prius: et ex puncto B oporteat ad rectam A C ducere rectam, quae cum ipsa A C faciat angulum internum aequalem angulo A E B.

Abscissa A F aequali B E, jungatur B F: ea faciet angulum internum B F A aequalem angulo A E B, per El. prop. 4.

§. 187.

Eidem adhuc respondebunt sequentia:

Problema LIV. Ad datam positione rectam uno in extremo terminatam et ad easdem ipsius partes inclinatae sint duae rectae aequales aequalibus angulis internis, una quidem in ejus extremo, altera vero in alio ipsius puncto; et ab extremo dicto ad posterioris inclinatae terminum ducta sit linea recta: oporteat ex prioris inclinatae termino ad rectam illam positione datam ducere rectam lineam priori ductae aequalem.

Fig. 78. a,b. Data positione sit recta A B in A terminata et ad eam, ad easdem ipsius partes, duae rectae aequales, A D quidem in ejus extremo A, C E vero in alio ejus puncto C, inclinatae sint angulis internis D A C, E C A aequalibus; et ex extremo A ad posterioris inclinatae terminum E ducta sit recta A E: oporteat ex prioris inclinatae termino D ad rectam A B ducere rectam ductae A E aequalem.

Ducatur D C: dico factum. Ea enim ex D ad rectam A B ducta est, et aequalis est ipsi AE, per El. prop. 4.

Problema LV., Datis iisdem, quae prius: oporteat ex prioris inclinatae termino ad rectam positione datam ducere rectam lineam, quae triangulum terminet aequale ei, quod prior ducta terminat.

Data sint eadem, quae prius; et oporteat ex termino D ad rectam A B ducere rectam, quae triangulum terminet aequale triangulo A E C.

Jungatur D C: dico factum. Ea enim ex D ad rectam A B ducta est, et terminat triangulum A D C aequale triangulo A E C, per Elem. prop. 4.

Problema LVI. Datis iisdem, quae prius: oporteat ad priorem inclinatam in ejus termino et ad partes ejus easdem, ad quas est recta positione data, constituere angulum aequalem ei, qui in termino posterioris inclinatae ab hac ipsa et priori ducta comprehenditur.

Data sint eadem quae prius; et oporteat ad rectam A D in ejus termino D et ad ipsius partes easdem, ad quas est recta A B, constituere angulum aequalem angulo C E A.

Jungatur D C: dico factum. Erit enim angulus A D C aequalis angulo C E A, per El. prop. 4.

Problema LVII. Datis iisdem, quae prius: oporteat a prioris inclinatae termino ad rectam positione datam ducere rectam lineam, quae cum ipsa angulum internum faciat aequalem ei, quem prior ducta cum ipsa facit.

Data sint eadem quae prius; et ex puncto D oporteat ad rectam positione datam A B ducere rectam, quae cum ipsa angulum internum faciat aequalem angulo E A B.

Jungatur D C: dico factum. Ea enim ex puncto D ad A B ducta est, et facit angulum D C A aequalem angulo E A B, per El. prop. 4.

§. 188.

Hic rursus (similiter ac Theorem ati XXIV Problemata XLVI. et XLVII.) Theorem ati XXXIII (§. 70.) sequentia respondebunt problemata:

Problema LVIII. Rectae alicui in ipsius extremis insistant ad easdem partes duae perpendiculares, et ab uno extremo ad perpendicularem oppositam du-

cta sit recta quaecunque; oporteat ab altero extremo etc. (reliqua manent, ut in Probl. XLVI.)

Fig. 79. Rectae A B in extremis A, B ad easdem ipsius partes insistant perpendiculares A C, B D; et reliqua manent, ut istic (§. 184.)

Itemque hoc;

Problema LIX. Rectae alicui expositae in uno extremo et in alio ipsius puncto ad easdem partes insistant duae perpendiculares aequales, et a termino posterioris perpendicularis ad dictum extremum ducta sit recta: oporteat etc: (reliqua ut in Probl. XLVII.

Fig. 80. Rectae A B in ipsius extremo A et alio puncto C ad easdem partes insistant perpendiculares aequales A D, C E, etc. ut istic (§. 184.)

§. 189.

Porro (similiter ac Theoremati XXVI. Problemata XLVIII. IL.) Theoremati XXXV. (§. 72.) haec respondebunt:

Problema LX. Ad datam rectam in ipsius extremis et ad easdem partes inclinatae sint duae rectae sub angulis aequalibus, et in uno extremo perpendicularis insistat oppositae inclinatae occurrens: oporteat in altero extremo perpendicularem rectae datae ducere.

Fig. 81. Ad rectam datam A B in extremis A et B inclinatae sint ad easdem partes rectae A C, B D sub angulis B A C, A B D aequalibus, et cetera, ut in Probl. XLVIII. (§. 185.)

Problema LXI. Ad rectam expositam in extremo et in alio ipsius puncto ad easdem partes duae rectae aequalibus angulis internis inclinatae sint et ipsae inter se aequales; etc. (reliqua ut in Probl. IL.)

Ad expositam A B in extremo A et in alio ipsius puncto C duae rectae A D, C E aequalibus angulis internis B A D, A C E inclinatae sint, et ipsae inter se aequales sint, etc. (ut istic §. 185.) Fig. 82.

§. 190.

Ad Quaestionem sextam Capitis II*di* Theoremati XXXVII et seqq. (§. 75.) haec respondebunt problemata:

Problema LXII. Positione datis duabus rectis concurrentibus et facientibus angulum; et inter ipsas ducta recta, quae inaequalia ab ipsis segmenta abscindat, concursui earum adjacentia; et puncto, quod segmento ab una earum abscisso aequale abscindat segmentum, in altera sumto: oporteat ab hoc puncto ducere aliam rectam inter duas positione datas interceptam, quae priori ductae aequalis sit.

Positione datae sint duae rectae A B, A C concurrentes in A et facientes angulum, et inter ipsas ducta recta D E inaequalia ab ipsis abscindat segmenta concursui A adjacentia A D, A E; et punctum, quod segmento A D ab una A B abscisso aequale abscindat segmentum, sumatur in altera A C, puta punctum F, quod abscindat segmentum A F segmento A D aequale: oporteat ab hoc puncto F ducere aliam rectam inter duas positione datas A B, A C interceptam, quae aequalis sit priori ductae D E. Fig. 83.a.b.

Id sic efficietur:

Abscindatur etiam ab A B segmentum A G segmento alterius A E aequale, et jungatur F G: ea erit aequalis D E per El. prop. 4., et factum erit, quod proponebatur.

Problema LXIII. Datis iisdem, quae prius: oporteat ab hoc puncto ducere aliam rectam inter duas

positione datas interceptam, quae triangulum terminet aequale ei, quod prior ducta terminat.

Dentur eadem quae prius; et oporteat a puncto F ducere rectam aliam inter A B, A C interceptam, quae triangulum terminet aequale triangulo A D E.

Ab recta A B abscissa A G aequali A E, jungatur F G: ea terminabit triangulum A F G aequale triangulo A D E, per El. prop. 4.

Problema LXIV. Datis iisdem, quae prius: oporteat ad hoc alterius rectae segmentum in sumto puncto et ad easdem partes, ad quas est prior rectarum concurrentium, constituere angulum internum aequalem ei, quem prior ducta cum priori concurrentium facit.

Dentur eadem, quae prius; et oporteat ad rectae A C segmentum A F in puncto F et ad eadem ipsius partes, ad quas est A B, constituere angulum internum aequalem angulo A D E.

Ab recta A B abscissa A G aequali A E; jungatur F G: ea faciet angulum internum A F G aequalem angulo A D E, per El. prop. 4.

Problema LXV. Datis iisdem, quae prius: oporteat ab hoc sumto puncto ducere rectam, quae ad priorem concurrentium inclinetur angulo interno aequali ei, quo prior ducta ad posteriorem concurrentium inclinata est interno angulo.

Dentur eadem, quae prius: et oporteat e puncto F ducere rectam, quae ad rectam A B inclinetur angulo interno aequali angulo A E D.

Ab recta A B abscissa A G aequali A E, jungatur F G: ea ad rectam A B inclinabitur angulo interno A G F, qui aequalis erit angulo A E D, per El. prop. 4.

§. 191.

Sed hic non alienum erit, simili ratione ac supra in Probl. V, VI, VII. factum est, Problemata §. praec. simplicius proponere omisso uno datorum, ut fiat.

Problema LXVI. Dato angulo rectilineo et recta cruribus ejus intercepta, quae inaequalia crurum segmenta vertici adjacentia abscindat: alteram rectam cruribus interceptam ducere priori aequalem.

Fig. *83.a,b.* Datus sit angulus rectilineus A A C, et recta D E cruribus A B, A C intercepta abscindens inaequalia crurum segmenta vertici adjacentia A D, AE: oporteat alteram rectam cruribus A B, A C interceptam ducere priori D E aequalem.

Abscindantur a cruribus A C, A B segmenta A F, A G, illud segmento A D, hoc segmento A E aequale: et jungatur recta F G: ea aequalis erit D E.

Problema LXVII. Datis iisdem, quae prius: alteram rectam cruribus interceptam ducere, quae triangulum terminet aequale ei, quod prior terminat.

Data sint eadem, quae prius: et oporteat alteram rectam cruribus A B, A C interceptam ducere, quae triangulum terminet triangulo A D E aequale.

Factis iisdem, quae prius: recta F G terminabit triangulum A F G aequale triangulo A D E.

Problema LXVIII. Datis iisdem, quae prius: alteram rectam cruribus interceptam ducere, quae ad crus assignatum inclinetur angulo interno aequali ei, quo prior ad crus reliquum inclinata est.

Data sint eadem, quae prius: et oporteat alteram rectam cruribus A B, A C interceptam ducere, quae ad crus assignatum A B inclinetur angulo interno aequali ei, quo prior D E inclinata est ad crus reliquum A C interno A E D.

Factis iisdem, quae prius, juncta F G faciet, quod imperatur: inclinabitur enim ad A B angulo interno A G F aequali angulo A E D.

§. 192.

Theoremati XLI. (§. 78.) haec respondebunt:

Problema LXIX. Dato triangulo aequicruri, et ex uno basis extremo ducta recta ad crus oppositum: oporteat ex altero basis extremo ad crus reliquum ducere rectam priori ductae aequalem.

Fig. 84. Datum sit triangulum aequicrus A B C, et e basis extremo B ad crus oppositum A C ducta recta B D; oporteat ex altero basis extremo C ad crus reliquum A B ducere rectam priori ductae B D aequalem.

Problema LXX. Datis iisdem: oporteat ex altero basis extremo ad crus reliquum ducere rectam, quae triangulum terminet vertici dati trianguli adjacens aequale ei, quod prior ducta terminat.

Data sint eadem, quae prius: oporteat ex B ad crus A B ducere rectam, quae triangulum terminet vertici A adjacens aequale triangulo A B D.

Problema LXXI. Datis iisdem: oporteat ad crus dictum in altero basis extremo constituere angulum intra triangulum datum, aequalem ei, quem prior ducta in priori basis extremo cum reliquo crure comprehendit.

Data sint eadem, quae prius: et oporteat ad crus A C in C constituere angulum intra triangulum A B C, aequalem angulo A B D.

Problema LXXII. Datis iisdem: oporteat ex altero basis extremo rectam ducere, quae ad cruris oppositi segmentum vertici adjacens ab ipsa abscissum inclinetur angulo aequali ei, quo prior ducta ad prioris cruris segmentum vertici adjacens inclinata est.

Dentur eadem, quae prius: et oporteat ex C altero basis extremo rectam ducere, quae ad cruris oppositi A B segmentum vertici A adjacens ab ipsa abscissum inclinetur angulo aequali angulo A D B.

Haec quatuor problemata efficiuntur, abscisso a crure A B segmento A E aequali A D, jungendo rectam C E: ea enim et aequalis erit B D, et terminabit triangulum A C E aequale triangulo A B D, et faciet angulum A C E angulo A B D, et angulum A E C angulo A D B aequalem.

§. 193.

Similiter Theoremati XLII (§. 79.) respondebunt haec:

Problema LXXIII. Dato triangulo aequicruri, et recta ex uno basis ejus extremo ad cruris oppositi infra basim continuationem ducta: oporteat ex reliquo basis extremo ad reliqui cruris continuationem ducere rectam priori ductae aequalem.

Datum sit triangulum aequicrus A B C; et recta B D ex basis extremo B ad reliqui cruris A C continuationem infra basim factam ducta: oporteat ex reliquo basis extremo C ad reliqui cruris A B continuationem ducere rectam priori ductae B D aequalem. *Fig. 85.*

Problema LXXIV. Datis iisdem: oporteat ex reliquo basis extremo ad reliqui cruris continuationem ducere rectam, quae triangulum terminet vertici trianguli dati adjacens, aequale ei, quod prior ducta terminat eidem vertici adjacens.

Dentur eadem, quae prius: et oporteat ex reliquo basis extremo C ad reliqui cruris A B continuationem ducere rectam, quae triangulum terminet vertici A adjacens, aequale triangulo A B D.

Problema LXXV. Datis iisdem; oporteat ad crus dictum in reliquo basis extremo constituere angulum ad easdem partes, ad quas est datum aequicrus triangulum, aequalem ei, quem prior ducta cum reliquo crure in priore basis extremo comprehendit.

Dentur eadem, quae prius; et oporteat ad crus dictum A C in reliquo basis extremo C constituere angulum ad easdem partes, ad quas est triangulum A B C, aequalem angulo A B D.

Problema LXXVI. Datis iisdem; oporteat e reliquo basis extremo ad reliquum crus productum ducere rectam, quae ad ejus producti segmentum basi adjacens ab ipsa abscissum inclinetur angulo aequali ei, quo prior ducta ad prioris cruris producti segmentum basi adjacens inclinata est.

Dentur eadem, quae prius; et oporteat ex C ad crus A B productum ducere rectam, quae ad ejus producti segmentum basi adjacens ab ipsa abscissum inclinetur angulo aequali angulo A D B.

Haec omnia efficiuntur, abscissa A E aequali A D, ducendo rectam C E: ea enim et aequalis erit B D, et terminabit triangulum A C E aequale triangulo ABD, et faciet angulum A C E angulo A B D, et angulum A E C angulo A D B aequalem.

§. 194.

Capitis III Theoremati I. Cas. I. (§. 91. 92.) haec respondebunt:

Problema LXXVII. Datae alicui rectae terminatae, in uno extremo et in puncto, in quo ipsa bifariam secatur, ad easdem partes insistant duae rectae sub angulis interno et externo aequalibus; prior qui-

dem finita, posterior vero infinita; et e puncto bisectionis ad terminum insistentis finitae ducta sit recta: oporteat ab reliquo datae extremo ad insistentem infinitam ducere rectam priori ductae aequalem.

Rectae datae terminatae AB in extremo A et in puncto C, quo ea bifariam secatur, insistant ad easdem partes AD finita, CE infinita sub angulis DAB, ECB interno et externo aequalibus; et ducta sit recta CD: oporteat ex altero extremo B ad infinitam CE ducere rectam priori ductae CD aequalem. *Fig. 86.*

Problema LXXVIII. Datis iisdem; oporteat ex reliquo datae extremo ad insistentem infinitam ducere rectam, quae triangulum terminet aequale ei, quod prior ducta terminat.

Dentur eadem, quae prius: et oporteat ex extremo B ad infinitam CE ducere rectam, quae triangulum terminet aequale triangulo ADC.

Problema LXXIX. Datis iisdem: oporteat ad rectam datam in altero ipsius extremo et ad easdem partes constituere angulum aequalem ei, quem prior ducta cum segmento priori extremo adjacente comprehendit.

Dentur eadem, quae prius: et oporteat ad datam AB in altero ipsius extremo B et ad easdem partes constituere angulum aequalem angulo DCA.

Problema LXXX. Datis iisdem: oporteat ex altero extremo ad insistentem infinitam ducere rectam, quae cum ipsa angulum comprehendat internum aequalem ei, quem prior ducta cum finita insistente comprehendit.

Dentur eadem, quae prius; et oporteat ex extremo B ad infinitam CE ducere rectam, quae cum

ipsa comprehendat angulum internum aequalem angulo CDA.

Haec omnia efficiuntur, ab CE abscissa CF aequali AD, jungendo rectam BF. Ea enim et aequalis erit CD, et triangulum BFC terminabit aequale triangulo CDA, et faciet angulum CBF angulo ACD, et angulum BFC angulo CDA aequalem.

§. 195.

Eidem et sequentia respondebunt:

Problema LXXXI. Datae alicui rectae terminatae in uno extremo et in puncto, in quo ipsa bifariam secatur, ad easdem partes insistant duae rectae sub angulis interno et externo aequalibus, prior quidem infinita, posterior vero finita; et ex altero datae rectae extremo ad terminum finitae ducta sit recta: oporteat e puncto bisectionis datae ad infinitam ducere rectam priori ductae aequalem.

Fig. 87. Datae rectae terminatae AB in uno extremo A et in puncto, quo ipsa bifariam secatur, C insistant duae rectae AD, CE sub angulis interno DAB et externo ECB aequalibus; DA quidem infinita, EC vero finita; et ex altero extremo B ad finitae terminum E ducta sit recta BE: oporteat ex puncto bisectionis C ad infinitam CD ducere rectam priori ductae BE aequalem.

Problema LXXXII. Datis iisdem; oporteat e puncto bisectionis ad infinitam ducere rectam, quae triangulum terminet aequale ei, quod prior ducta terminat.

Dentur eadem, quae prius: et oporteat ex bisectionis puncto C ad infinitam AD ducere rectam, quae triangulum terminet triangulo ECB aequale.

Pro-

Problema LXXXIII. Datis iisdem; oporteat ad segmentum priori extremo et puncto bisectionis, interceptum ad easdem partes angulum constituere aequalem ei, quem ducta recta cum altero segmento comprehendit.

Dentur eadem, quae prius; et oporteat ad segmentum A C et ad easdem partes constituere angulum aequalem angulo E B C.

Problema LXXXIV. Datis iisdem; oporteat e puncto bisectionis ad infinitam ducere rectam, quae cum ipsa angulum internum comprehendat aequalem ei, quem prior ducta cum insistente finita comprehendit.

Dentur eadem, quae prius: et oporteat e puncto C ad A D ducere rectam, quae cum ipsa A D angulum internum comprehendat aequalem angulo B E C.

Haec omnia efficientur, ab infinita A D abscissa A F aequali C E, ducendo rectam C F. Ea enim et aequalis erit B E, et terminabit triangulum F A C aequali triangulo E C B; et faciet angulum F C A angulo E B C, et angulum A F C angulo C E B aequalem.

§. 196.

Ac rursus sequentia quoque:

Problema LXXXV. Datae positione alicui rectae in puncto ipsius extremo et in altero ad easdem partes insistant duae rectae aequales sub angulis interno et externo aequalibus, et e termino prioris insistentis ad dictum alterum punctum ducta sit recta: oporteat e termino posterioris insistentis ad segmentum rectae positione datae dicto angulo externo adjacens et ad eas partes non terminatum, ducere rectam priori ductae aequalem.

Datae positione rectae A B in extremo A et
Fig. 87. in altero ipsius puncto C insistant duae rectae aequales A D, C E sub angulis interno D A B et externo E C B aequalibus, et ex prioris insistentis termino D ducta sit ad alterum dictum punctum C recta D C: oporteat ex posterioris insistentis termino E ad segmentum C B ad partes B infinitum ducere rectam priori ductae D C aequalem.

P r o b l e m a LXXXVI. Datis iisdem; oporteat e termino posterioris insistentis ad segmentum rectae positione datae dicto angulo externo adjacens et ad eas partes infinitum, ducere rectam, quae triangulum terminet aequale ei, quod prior ducta terminat.

Dentur eadem, quae prius: et oporteat ex termino E insistentis C E ad segmentum infinitum C B ducere rectam, quae triangulum terminet aequale triangulo D A C.

P r o b l e m a LXXXVII. Datis iisdem; oporteat ad posteriorem insistentem in ipsius termino et ad easdem partes, ad quas est angulus dictus externus, constituere angulum aequalem ei, quem prior ducta cum priori insistente comprehendit.

Dentur eadem, quae prius: et oporteat ad posteriorem insistentem C E in ipsius termino E et ad easdem ipsius partes, ad quas est angulus dictus externus E C B, constituere angulum aequalem angulo ADC.

P r o b l e m a LXXXVIII. Datis iisdem; oporteat e termino posterioris insistentis ad segmentum positione datae dicto angulo externo adjacens ducere rectam, quae ad hoc segmentum inclinata sit angulo interno aequali ei, quo prior ducta ad prius segmentum inclinata est.

Dentur eadem, quae prius: et oporteat ex posterioris insistentis termino E ad segmentum C B ducere rectam, quae adipsam angulo interno inclinata sit aequali angulo D C A.

Haec omnia efficiuntur, ab segmento C B abscissa C F aequali A C, jungendo E F: ea enim et aequalis est D C, et terminat triangulum E C F triangulo D A C aequale, et facit angulum F E C angulo C D A aequalem, et angulum E F C angulo D C A.

§. 197.

Ac denique sequentia:

Problema LXXXIX. Datae alicui rectae terminatae in uno extremo, et in puncto, quo ipsa bifariam secta est, insistant duae rectae aequales sub angulis interno et externo aequalibus; et ex posterioris insistentis termino ad reliquum datae extremum ducta sit recta: oporteat e prioris insistentis termino ad rectam illam datam ducere rectam priori ductae aequalem.

Datae terminatae A B in uno extremo A et in puncto C, quo bifariam secta est, insistant duae rectae aequales A D, C E sub angulis interno D A B et externo E C B aequalibus; et ex posterioris insistentis C E termino E ad reliquum extremum B sit ducta recta E B: oporteat ex prioris insistentis termino D ad rectam datam A B ducere rectam priori ductae E B aequalem. Fig. 89.

Problema XC. Datis iisdem; oporteat e prioris insistentis termino ad rectam datam ducere rectam, quae triangulum terminet aequale ei, quod prior ducta terminat.

Dentur eadem quae prius: et oporteat e termino D ad rectam datam A B ducere rectam, quae triangulum terminet aequale triangulo E C B.

Problema XCI. Datis iisdem; oporteat ad priorem insistentem in ipsius termino et ad easdem ipsius partes, ad quas est recta data, constituere angulum aequalem ei, quem recta ducta cum posteriori insistente comprehendit.

Dentur eadem quae prius: et oporteat ad priorem insistentem A D in ipsius termino D et ad easdem ipsius partes, ad quas est recta data A B, constituere angulum aequalem angulo C E B.

Problema XCII. Datis iisdem; oporteat ad segmentum priori extremo et puncto bisectionis interceptum in hoc bisectionis puncto ad easdem partes, ad quas insistentes sunt, constituere angulum aequalem ei, quem ducta in reliquo extremo cum recta data comprehendit.

Dentur eadem, quae prius: et oporteat ad segmentum A C in puncto C et ad easdem partes, ad quas insistentes A D, C E sunt, constituere angulum aequalem angulo E B A.

Haec omnia efficientur ducendo rectam a D ad C: ea enim et aequalis erit E B, et triangulum terminabit D A C aequale triangulo E C B, et faciet angulum C D A angulo B E C, et angulum A C D angulo C B E aequalem.

§. 198.

Casui IIdo. Theorematis I. Cap. III. haec respondebunt:

Problema XCIII. Datae rectae in duobus ejus extremis et ad easdem partes insistant duae rectae

sub angulis aequalibus, una terminata, altera infinita; et e puncto, in quo data illa recta bifariam divisa est, ad extremum terminatae insistentis ducta sit recta: oporteat ex eodem puncto ad insistentem infinitam ducere rectam, quae priori ductae aequalis sit.

Datae rectae A B in duobus ejus extremis A, B et ad easdem partes insistant duae rectae A C terminata, B D infinita, sub angulis C A B, D B A aequalibus; et e puncto E, in quo data A B bifariam divisa est, ad extremum C terminatae insistentis A C ducta sit recta E C: oporteat ex eodem puncto E ad insistentem infinitam B E ducere rectam priori ductae E C aequalem. *Fig. 90.*

Problema XCIV. Datis iisdem; oporteat ex eodem puncto ad insistentem infinitam ducere rectam, quae triangulum terminet aequale ei, quod prior ducta terminat.

Dentur eadem, quae prius: et oporteat ex puncto E ad infinitam insistentem B D ducere rectam, quae triangulum terminet aequale triangulo C A E.

Problema XCV. Datis iisdem; oporteat ex eodem puncto ducere rectam, quae angulo, quem prior ducta cum segmento, quod terminatae adjacet, facit, aequalem angulum cum segmento, quod infinitae adjacet, faciat.

Dentur eadem, quae prius: et oporteat e puncto E ducere rectam, quae cum segmento E B faciat angulum aequalem angulo C E A, quem prior ducta C E cum segmento E A facit.

Problema XCVI. Datis iisdem; oporteat ex eodem puncto ad insistentem infinitam ducere rectam, quae cum ipsa angulum internum faciat aequalem ei, quem prior ducta cum insistente terminata facit.

Dentur eadem, quae prius: et oporteat e puncto E ad infinitam B D ducere rectam, quae cum ipsa angulum internum faciat aequalem angulo E C A, quem prior ducta E C cum terminata insistente C A facit.

Haec omnia efficientur ab BD abscissa BF aequali AC, jungendo rectam E F: haec enim aequalis erit E C, et terminabit triangulum E F B aequale triangulo ECA, et faciet angulum B E F angulo A E C, et angulum E F B angulo E C A aequalem.

§. 199.

Eidem respondebunt et sequentia;

Problema XCVII. Datae rectae in duobus ipsius extremis et ad easdem partes insistant duae rectae aequales sub angulis aequalibus, et ab unius insistentium termino ad punctum, in quo data recta bifariam divisa est, ducta sit linea recta: oporteat ab alterius insistentis termino ad eandem datam rectam ducere rectam aequalem priori ductae.

Fig. 91. Datae rectae AB in duobus extremis A, B et ad easdem partes insistant duae rectae aequales A C, B D sub angulis C A B, D B A aequalibus, et ab unius insistentium termino C ad punctum E, in quo recta A B bifariam divisa est, ducta sit recta C E: oporteat ab alterius insistentis termino D ad eandem datam A B ducere rectam aequalem priori ductae C E.

Problema XCVIII. Datis iisdem; oporteat ab alterius insistentis termino ad eandem datam rectam ducere rectam, quae aequale terminet triangulum ei, quod prior ducta terminat.

Dentur eadem, quae prius: et oporteat a puncto D ad eandem datam AB ducere rectam, quae triangulum terminet aequale triangulo ACE.

Problema IC. Datis iisdem; oporteat ad alteram insistentem in ipsius termino et ad partes interiores constituere angulum aequalem ei, quem recta ducta cum priori insistente facit.

Dentur eadem, quae prius: et oporteat ad insistentem BD in ejus termino D et ad partes interiores (ad quas scilicet sunt BA et reliquae lineae) constituere angulum aequalem angulo ACE.

Problema C. Datis iisdem; oporteat ab alterius insistentis termino ad eandem rectam datam ducere rectam, quae cum ipsa aequalem, ac prior ducta, angulum faciat.

Dentur eadem, quae prius; et oporteat ab termino D ad datam eandem AB ducere rectam, quae cum ipsa angulum faciet aequalem angulo CEA, quem prior ducta cum ipsa facit.

Haec omnia efficiuntur ducenda recta DE: haec enim aequalis est CE, et triangulum DEB terminat triangulo CAB aequale, et facit angulum BDE angulo ACE, et angulum DEB angulo CEA aequalem.

§. 200.

Casui III o. Theorematis I. Cap. III. haec respondebunt:

Problema CI. Ad rectam datam in puncto, in quo ea bifariam secatur, et ad easdem ipsius partes inclinatae sint duae rectae aequalibus angulis, quos cum duobus illius segmentis, alterum cum altero faciunt, una quidem terminata, altera vero infinita; et

ad extremum finitae ab extremo segmenti, quocum ipsa unum ex dictis angulis facit, ducta sit recta: oporteat ab extremo alterius segmenti ad inclinatam infinitam ducere rectam priori ductae aequalem.

Fig. 91. a. b. Ad datam AB in puncto C, quo ea bifariam secatur, ad easdem ipsius partes inclinatae sint rectae CD finita, CE infinita sub angulis DCA, ECB aequalibus, et ad finitae extremum D ab extremo A segmenti CA, quocum illa unum ex dictis angulis facit, nempe angulum DCA, ducta sit recta DA: oporteat ab extremo B alterius segmenti ad infinitam CE ducere rectam priori ductae AD aequalem.

Problema CII. Datis iisdem; oporteat ab extremo alterius segmenti ad inclinatam infinitam ducere rectam, quae triangulum terminet aequale ei triangulo, quod prior ducta terminat.

Dentur eadem, quae prius; et oporteat ab extremo B ad infinitam CE ducere rectam, quae aequale terminet triangulum triangulo DAC.

Problema CIII. Datis iisdem; oporteat ad alterum segmentum in ipsius extremo et ad easdem partes constituere angulum aequalem ei, quem recta ducta cum priori segmento comprehendit.

Dentur eadem, quae prius; et oporteat ad segmentum DB in ipsius extremo B et ad easdem partes (ad quas rectae inclinatae sunt) constituere angulum aequalem angulo CAD.

Problema CIV. Datis iisdem; oporteat ab alterius segmenti extremo ad inclinatam infinitam ducere rectam, quae cum ipsa faciat angulum internum aequalem ei, quem prior ducta cum inclinata terminata facit.

Dentur eadem; et oporteat ab extremo B ad rectam C E ducere rectam, quae cum ipsa C E faciat angulum internum aequalem angulo C D A.

Haec omnia fient, ab C E abscindendo C F aequalem C D, tum jungendo rectam B F: quae quidem aequalis est A D, et triangulum C F B terminat aequale triangulo C D A, et facit angulum C B F angulo C A D, et angulum C F B angulo C D A aequalem.

§. 201.

Eidem et haec respondebunt:

Problema CV. Datae rectae in ipsius puncto aliquo intermedio insistant ad easdem partes rectae duae aequales facientes angulos cum segmentis sibi adjacentibus aequales, quorum unum quidem terminatum sit, alterum vero infinitum; et e prioris insistentis termino ad terminati segmentum extremum ducta sit recta: oporteat ex posterioris insistentis termino ad segmentum infinitum ducere rectam priori ductae aequalem.

Datae rectae A B in ipsius puncto intermedio C insistant ad easdem partes rectae CD, CE facientes cum segmentis sibi adjacentibus CA, C B angulos aequales D C A, E C B, et sit eorum segmentorum unum quidem C A terminatum, alterum vero C B ad partes B infinitum; et e prioris insistentis termino D ad segmenti terminati extremum A ducta sit recta D A: oporteat ex posterioris insistentis termino E ad segmentum infinitum C B ducere rectam priori ductae D A aequalem. *Fig. 93.*

Problema CVI. Datis iisdem; oporteat ex posterioris insistentis termino ad segmentum infinitum du-

cere rectam, quae triangulum terminet aequale ei, quod prior ducta terminat.

Dentur eadem, quae prius; et oporteat ex termino E ad segmentum CB ducere rectam, quae triangulum terminet aequale triangulo ADC.

P r o b l e m a CVII. Datis iisdem; oporteat ad posteriorem insistentem in ipsius termino et ad easdem ipsius partes, ad quas est segmentum infinitum, constituere angulum aequalem ei, quem ducta recta cum priori insistente comprehendit.

Dentur eadem, quae prius: et oporteat ad CE in termino E et ad easdem ipsius partes; ad quas est segmentum CB, constituere angulum aequalem angulo CDA.

P r o b l e m a CVIII. Datis iisdem; oporteat ex posterioris insistentis termino ad segmentum infinitum ducere rectam, quae ad segmentum hoc inclinetur angulo interno aequali ei, quo prior ducta ad prius segmentum inclinata est.

Dentur eadem, quae prius: et oporteat ex posterioris insistentis termino E ad segmentum CB ducere rectam, quae ad ipsam inclinetur angulo interno aequali angulo DAC.

Haec omnia fient, a segmento BC abscissa CF aequali CA ducendo rectam EF: quae quippe aequalis erit DA, et triangulum CEF terminabit aequale triangulo CDA, et faciet angulum CEF angulo CDA, et angulum EFC angulo DAC aequalem.

§. 202.

His similiter tractari possunt ii tres Casus Theorematis I. Cap. III., cum sunt insistentes ad diversas

datae rectae partes: sed non diutius in his immoramur.

§. 203.

Propositioni §. 103. Theoremata I. II. III. Cap. III. complectenti respondebit, hic quoque res brevius complectendo.

Problema CIX. Ad datam positione rectam ex duobus punctis extra ipsam sitis ductae sint duae rectae aequales et facientes angulum angulo aequalem, quem una quaeque earum cum segmento rectae illius positione datae assignato, ipsi adjacente, facit; et ex priori illorum punctorum ad segmentum prius altera recta ducta sit: oporteat ex posteriori puncto ad posterius segmentum alteram rectam ducere, quae

a) vel alteri e priori puncto ductae aequalis sit;

b) vel triangulum terminet aequale ei, quod illa terminat;

c) vel cum prima e posteriori puncto ducta comprehendat angulum aequalem ei, quem duae e priori puncto ductae secum invicem comprehendunt;

d) vel ad segmentum posterius angulo interno inclinetur aequali ei, quo altera e priori puncto ducta ad segmentum prius inclinatur angulo interno.

Itemque Problema CX. Rectae lineae positione datae in duobus ipsius punctis insistant duae rectae sub angulis, quos cum uno quaeque adjacente sibi segmento faciunt, aequalibus; et sumtis his duobus segmentis aequalibus, ex unius eorum termino ad insistentem ipsi conterminam ducta sit linea recta: opor-

teat ex alterius segmenti termino ad insistentem ipsi conterminam, ducere rectam lineam, quae

a) vel priori ductae aequalis sit;

b) vel aequale triangulum terminet ei, quod prior ducta terminat;

c) vel cum altero segmento angulum faciat aequalem ei, quem prior ducta cum priori segmento comprehendit;

d) vel cum ipsa illa insistente aequalem faciat angulum internum ei, quem prior ducta cum priori insistente facit.

Sed horum expositionem, ne in nimias excurramus ambages, cum jam satis multa data sint problematum ex Theorematis supra propositis deducendorum exempla, omittimus: ut et reliquis Capitis III *ii.* Theorematis respondentia problemata praeterimus. Quorum omnium facilior effectio, cum proposita erunt, quam ipsa propositio generali enuntiatione comprehensa. Sed hujus enuntiationis haec, quae in hoc Capite continentur, exercitia utilia futura videbantur geometriae tyronibus, primum ad materiam illius disciplinae, quum in his, quae consideravimus, linearum rectarum varie inter se combinatarum consignationibus et symptomitis multa sint, quae passim etiam ulterius in re geometrica progredienti occurrant; ibi quidem majori rerum varietate et difficiliori contextu implicata; quae hic simplicissime et ab omni aliarum rerum admistione libera considerata sunt. Deinde ad judicium discentium acuendum profuturum videtur, si non iis tantum, quae in singularibus figuris accidunt, intelligendis aut inveniendis contenti fuerint, sed ubique earum rerum, quae generalem quendam ambitum habent, genera-

les quoque notiones distinctas concipere, et quod ipsum ad illas concipiendas aut necessarium est aut insignem usum habet, verba quoque et denominationes convenientes adhibere et reperire assuerint. Quod et excusationis loco dictum esto, quod in hujus Capitis materia tam multum immorati simus.

CAPUT V.

Sistit Propositionem unam contrariam propositioni Euclidis 4tae seu theoremati primo; tum et singulis deductis ex hoc in Cap. II. et III. theorematis propositiones singulas contrarias: hoc est, tales propositiones, in quibus pro parte aliqua tum hypothesis tum consequentis illorum theorematum substituitur contrarium; nominatim pro aequalibus inaequalia. Praemittuntur aliqua de Propositionibus contrariis et conversis generatim.

§. 204.

Saepenumero accidit in vita communi, ut homines, qui accurata ratiocinationis praecepta et adhibendas in illa cautiones non teneant species quadam decepti effato alicui, quod aut certum sciunt aut saltim verum esse putant, mente atque cogitatione con-

nectant et confundant alterum aliquod effatum, quasi ex illo priori necessario consequatur: quod tamen revera non consequitur. Tale est, quod Aristoteles dicit in Sophisticis elenchis (Cap. V.) *το οιεςθαι αντι ερεφειν την ακολεθησιν*, h. e. putare consecutionem reciprocari: quod sic explicat: *Οταν γαρ τεδι οντος, εξ αναγκης τοδε η· και τεδε οντος οιονται και θατερον ειναι εξ αναγκης*; h. e. cum posito hoc, necesse sit illud esse: putant illo posito, hoc quoque esse. Vel ut idem aliter enuntiat (Cap. XXVIII ibid): *αξιεται γαρ, ει τοδε μετα τεδε, και τοδε ειναι μετα τεδε.* Ex quo multas dicit oriri judiciorum ex sensibus fallacias (Cap. V. l. cit.) *Οθεν και αι περι την δοξαν εκ της αιςθησεως απαται γινονται· πολλακις γαρ την χολην μελι υπολαμβανομεν ειναι, δια το επεςθαι το ξανθον χρωμα τω μελιτι. Και επει συμβαινει την γην υσαντος γινεθαι διαβροχον· καν η διαβροχος, υπολαμβανομεν υσαι· το δε εκ αναγκαιον*: praeterea in rhetoricis saepe adhiberi illud ratiocinandi genus; et apud philosophos quoque (*εν τοις συλλογιςτικοις*) reperiri: quale esset Melissi exemplum, qui cum assumsisset, *το γενομενον εξ αρχης γενεαθαι*, sic inferat: *Ει εν μη γεγονεν, αρχεν εκ εχει το παν.* manifesto, inquit paralogismo: *Ου γαρ, ει το γενομενον απαν αρχην εχει, και ει τι αρχην εχει, γεγονεν· ωσπερ εδ', ει ο πυρεττων θερμος, αναγκη και τον θερμον πυρεττεν.* Quamquam hoc posterius exemplum, Melissi ratiocinationem dico, est potius ex eo genere, quod dicit (ibid. Cap. XXVIII.) *κατα τας αντιθεσεις. ει γαρ τοδε τωδε ακολεθει, και τω αντικειμενω το αντικειμενον* (scilicet *αξιεται*); h. e. ex eo, quod illi hoc consequens est, etiam illius opposito hujus oppositum consequens esse inferunt. Quod quidem genus priori affine, cognatum ac fere idem est: ut facile patebit ex his, quae jam dicentur.

versantur, ne admittant id, quod imperitis in vita communi saepe accidit, ut propositiones directas cum conversis confundant, et alteras alteris ut aequipollentes aut ut necessario consequentes sumant. Deinde vero, quoniam in multis propositionibus usu venit, ut earum conversae pariter, atque ipsae verae sint; et ad solidam rerum cognitionem interest, id ubi fiat, non ignorare; operaeque pretium est in plerisque propositionibus, disquirere, num forte conversae quoque verae sint: ad eam disquisitionem expediet, in promtu habere illud, quod ista reducatur ad disquirendum hoc: utrum posito ejus, quod est in propositione priori antecedens seu hypothesis, contrario, conjunctum et consequens sit consequentis quoque illius contrarium. Quod si ita fuerit: etiam illa, de qua quaeritur, conversa vera erit. Veluti, cum Euclides demonstret in quinta, Triangulorum aequicrurium angulos ad basin esse aequales; si ostendi poterit, non aequicrurium bases non esse aequales (quae erit propositio 5tae contraria; quippe quae et hypothesin hypothesi, et consequens consequenti contrarium habeat;) sequetur et prioris conversam veram esse, nempe ut triangula, quae angulos ad basin aequales habeant, aequicrura sint; quod, si non essent, nec angulos illos aequales haberent.

§. 207.

Tenebunt ergo ii, quibus non satis est in disciplinis tradita ab aliis ediscere, sed ipsis per se excogitare aliquid et invenire volupe est: inter primas et latissime patentes inveniendi occasiones esse illam, quam

ad plurimas propositiones suppeditat quaestio: utrum, posito contrario hypotheseos vel antecedentis, consequentis quoque contrarium concludi queat. Quoniam autem in multis propositionibus fit, ut hypothesis pluribus constet partibus: quaeri poterit de earum unaquaque, num posita ejus contraria, ceteris autem manentibus, contrarium etiam futurum sit consequens? et, si consequentia quoque prioris plura sint, utrum cujusque eorum futurum sit contrarium consequens; an forte non omnium quidem, sed saltim quorundam?

Veniamus ad materiam subjectam. Si duo triangula habeant duo latera duobus lateribus, alterum alteri, aequalia, et angulum angulo aequalem, qui ab illis comprehenditur: fore et basin basi aequalem, dicit propos. quarta. Iam si duo latera duobus lateribus aequalia relinquas, uti dictum est, sed angulum comprehensum in uno triangulo sumas majorem: docet Euclidis 24a Imi, fore et basin illius majorem; sed non et triangulum triangulo majus erit, ut ostendit Clavius ad illum locum; nec de reliquis angulis quicquam sequetur.

§. 208.

Alterum exemplum totam iis, quae hoc Capite tractabuntur, praebebit materiam. Si unum latus uni lateri aequale relinquas, ut et angulum angulo, lateribus interceptum; sed reliquum latus reliquo majus sumas: erit et triangulum triangulo majus; et reliquorum angulorum is, qui majori latere subtenditur, major quum qui minore: quae quidem per ipsam prop. 4tam ostendentur, ut statim videbimus: Sed de basi nihil sequitur; quae major aut minor aut aequalis esse poterit. Reliquus denique angulus minor erit in priori

triangulo: sed hoc demum per 16am Imi demonstrari potest. Hic vero in iis subsistimus, quae per solam prop. 4tam ipsam demonstrari possunt. Erit ergo haec propositio Euclideae 4tae respondens contraria:

Si duo triangula duorum laterum unum quidem uni aequale, alterum vero alteri inaequale habeant, sed et angulum angulo aequalem habeant eum, qui dictis lateribus comprehenditur: inaequalia erunt ea triangula; majus quidem id, quod habet latus majus ex inaequalibus; et angulos inaequalibus lateribus subtensos inaequales habebunt; majorem quidem eum, qui majori latere subtenditur. *Fig.*

Sint igitur triangula ABC, DEF, habentia *94.* latus quidem AB lateri DE aequale, AC vero majus DF, et angulum BAC angulo EDF aequalem: dico triangulum ABC majus esse triangulo DEF, et angulum ABC majorem angulo DEF.

A majori enim AC abscindatur AG, aequalis minori DF, et jungatur BG Et per ipsam prop. 4am erit triangulum ABG aequale triangulo DEF: ergo totum triangulum ABC majus triangulo DEF; porro erit angulus ABG aequalis angulo DEF; ergo totus angulus ABC major angulo DEF per Axioma 9num quae erant ostendenda.

Hanc igitur propositionem, quae sistit quartae Euclideae contrariam secundum partem illius, nunc ad varios casus et figuras analogas illis, quae Capite II. et III. expositae sunt, hoc Capite applicabimus.

§. 209.

Primum igitur Theoremati Imo Cap. II. (§. 32.) hoc respondebit contrarium:

Si duae rectae angulum comprehendentes sint inaequales, et ex earum extremis ad extremum rectae illum angulum bifariam secantis ducantur duae rectae: triangulorum, que ab his terminantur, majus erit illud, quod majori rectae adjacet; itemque ex angulis, quos ductae duae rectae cum recta angulum bifariam secante faciunt, major erit is, qui majori recta subtenditur.

Fig. 95. Sint enim duae rectae inaequales AB, AC, quarum AB major; comprehendentes angulum BAC, quem bifariam secet recta AD, ad cujus extremum D ab extremis illarum B, C ductae sint rectae BD, CD: dico eorum, quae ab his terminantur, triangulorum ABD, ACD majus esse triangulum ABD, quod majori lateri AB adjacet; et ex angulis ADB, ADC, quos ductae rectae cum recta angulum bifariam secante faciunt, majorem esse angulum ADB, qui majori recta AB subtenditur.

Ostenditur vel applicatione propositionis §. praec. contentae, vel immediate per prop. 4tam et Axioma 9num, abscissa ab AB majori recta AE aequali minori AC, et juncta DE; eadem ratione, qua §. praec. Et eadem ratio est sequentium, quod semel monuisse sufficiat; ut in eorum demonstratione non opus sit ulterius immorari.

§. 210.

Theoremati II. (§. 34.) hoc: Si in quadrilatero duo latera contigua sint inaequalia, et angulus iis comprehensus bifariam sectus sit diagonali: quadrilaterum ipsum in inaequalia sectum erit, et major portio adjacebit lateri majori; et angulus priori angulo oppositus in inaequales sectus erit, quorum major ad easdem diagonalis partes erit, ad quas est majus latus.

In quadrilatero A B D C sint latera B A, A C inaequalia, et angulus B A C bifariam sectus sit diagonali A D: quadrilaterum in inaequalia sectum erit, et major portio A B D; itemque angulus B D C in inaequales sectus, quorum major A D B. *Fig. ead.*

§. 211.

Theoremati III. (§. 36.) hoc: Si trianguli non aequicruris angulum ad verticem bifariam secet recta occurrens basi: ea triangulum ipsum in inaequalia secabit, quorum majus erit illud, in quo crus majus; et basi ad inaequales angulos insistet, quorum major erit is, qui est ad partes cruris majoris. (Chrestom. geom. p. 352. Satz 9.)

Trianguli A B C habentis crura A B, A C inaequalia, quorum majus sit A B, angulum B A C ad verticem bifariam secet recta A D: ea triangulum A B C in inaequalia secabit, quorum majus est A B D, adjacens cruri majori A B; et basi B C ad inaequales angulos A D B, A D C insistet. quorum major est angulus A D B, qui est ad partes majoris cruris A B. *Fig. 96.*

Cui geminum hoc, respondens Theoremati IV. (§. 37.): Si ad rectam lineam ex eodem puncto tres rectae ductae sint, quarum duae exteriores sint inaequales et cum intermedia aequales faciant angulos: intermedia priori rectae ad inaequales angulos insistet, quorum major est ad partes rectae exterioris majoris.

Ad rectam lineam B C tres rectae A B, A D, A C ductae sint, quarum duae exteriores A B, A C sint inaequales, et cum intermedia A D faciant aequales angulos: intermedia A D priori rectae B C ad inaequales

angulos insistet, quorum major ADB est ad partes rectae exterioris majoris AB.

§. 212.

Theorémati V. (38.) hoc respondebit contrarium:

Si angulum ad verticem trianguli non aequicruris bifariam secet recta ultra basin producta, et ex ejus extremo ad extrema basis ducantur duae rectae: eae cum priori recta inaequales comprehendent angulos; majorem quidem ea, quae ad extremum basis, in quo majus crus terminatur, ducta est; et quae ipsis insistunt triangula verticem habentia eundem cum triangulo primo dicto, inaequalia erunt; majus quidem id, quod majori cruri adjacet.

[*Fig.* 97.] Trianguli non aequicruris ABC angulum BAC ad verticem bifariam secet recta ultra basin producta AD, et ex ejus extremo D ad extrema basis B, C ducantur rectae DB, DC: eae cum recta AD inaequales comprehendent angulos ADB, ADC; majorem quidem ADB ea DB, quae ad B extremum basis id, in quo crus majus AB terminatur, ducta est; et quae ipsis insistunt triangula ABD, ADC verticem habentia in A communem cum triangulo primo ABC, inaequalia erunt; majus quidem ABD, quod majori cruri AB adjacet.

§. 213.

Theoremati VI. (§. 39.) hoc:

Si trianguli non aequicruris angulum ad verticem bifariam secet recta intra ipsum triangulum terminata, et ex ejus extremo ad extrema basis ducantur duae rectae: eae cum priori recta inaequales facient angu-

los, quorum major erit ad partes cruris majoris; et quae ipsis insistunt triangula eundem habentia verticem cum triangulo primo dicto, inaequalia erunt, majus quidem id, quod cruri majori adjacet.

Sit triangulum non aequicrus A B C, cujus angulum BAC ad verticem bifariam secet recta intra ipsum triangulum terminata AD, et ex hujus extremo D ad basis extrema B, D ducantur duae rectae D B, D C: eae cum recta AD facient inaequales angulos A D B, A D C, quorum major ADB erit ad partes majoris cruris AB; et quae ipsis insistunt triangula A B D, ACD eundem habentia verticem A cum triangulo primo ABC, inaequalia erunt; majus quidem ABD id, quod majori cruri AB adjacet. *Fig. 98.*

§. 214.

Ad Quaestionem secundam Cap. II.

Theorematι VIII. (§. 43.) hoc respondet contrarium:

Si rectae alicui terminatae in puncto, quo in inaequalia secatur, perpendicularis insistat recta: quae ex hujus extremo ad extrema segmentorum inaequalium ducuntur rectae, inaequalia terminabunt triangula, quorum majus erit id, quod majori segmento insistit; et cum ipsa perpendiculari inaequales facient angulos, majorem quidem ad eas partes, ad quas majus est segmentum.

Rectae terminatae AB in puncto C, in quo in inaequalia secatur, perpendicularis insistat recta DC: junctae rectae DA, DB inaequalia terminabunt triangula DAC, DBC, quorum majus erit DAC, quod majori segmento AC insistit; et cum *Fig. 99.*

perpendiculari D C inaequales facient angulos A D C, B D C, quorum major erit A D C ad eas partes, ad quas est majus segmentum A C.

Cui affine hoc, respondens **Theorema ti IX.** (§. 44.):

Si recta e vertice trianguli ad basin ducta ipsam ad angulos rectos et in inaequalia secet: triangulum ipsum in inaequalia secabit, quorum majus majori basis segmento insistet; et angulus ad verticem in inaequales sectus erit, quorum major erit ad easdem partes, ad quas majus basis segmentum. (Chrestom. geom. p. 349. Satz 5.)

Fig. ead. E trianguli D A B vertice D ad basin A B ducta recta D C secet ad ipsam ad angulos rectos et in inaequalia segmenta A C, C B: triangulorum D A C, D B C, in quae totum dividitur, majus erit D A C, quod majori segmento A C insistit; et angulorum A D C, B D C, in quos angulus A D B ad verticem dividitur, major erit A D C, qui est ad partes majoris segmenti A C.

Itemque hoc, respondens **Theoremati X.** (§ 45.):

Si trianguli unus angulorum ad basin sit rectus, et juxta hunc angulum basi in directum adjiciatur recta major vel minor, et ex hujus extremo recta ad verticem ducatur: triangulum adjectae insistet majus vel minus priori triangulo, et angulum ad verticem habebit majorem vel minorem quam prius.

Sit triangulum A D C habens ad basin A C angulum A C D rectum, et juxta hunc angulum basi A C in directum adjiciatur recta C B basi A C inaequalis, puta minor; et ex hujus extremo B recta ad verticem D ducatur B D: erit triangulum adjectae C B insistens

D C B minus priori triangulo D A C, et habebit angulum ad verticem C D B minorem angulo ADC, quem prius habet ad verticem.

Itemque hoc, respondens Theorem ati XI. (§.46.):

Si trianguli unum latus basi insistat angulo recto, et ab ipso infra basin producto recta ex reliquo ad basin angulo ducta abscindat rectam dicto latere majorem vel minorem: ea triangulum terminabit priori majus vel minus, et cum basi faciet angulum majorem vel minorem dicto reliquo ad basin angulo.

Trianguli A B C latus A B basi B C insistat angulo recto, et ab ipso infra basin producto recta ex reliquo ad basin angulo C ducta C D abscindat rectam B D majorem latere A B: erit triangulum C B D majus triangulo A B C, et angulus D C B major angulo A C B. *Fig. 100.*

§. 215.

Ad Quaestionem III.

Theoremati XII. (§. 47.) hoc respondebit contrarium;

Si duae rectae angulum comprehendentes inaequales sint, et extra hunc angulum ad ipsius verticem posita sit recta comprehendens cum duabus prioribus angulos aequales, et ex puncto in ipsa sumto ad extrema priorum ducantur rectae: eae inaequalia terminabunt triangula, quorum majus erit id, quod majori rectarum inaequalium insistit; et angulos cum exteriori posita facient inaequales, quorum major erit ad eas partes, ad quas major recta.

Sint duae rectae inaequales A B, A C, quarum major A B, comprehendentes angulum B A C, *Fig. 101.*

extra quem ad ipsius verticem A posita sit recta A D comprehendens cum A B et A C angulos aequales, et ex puncto in ipsa sumto D ad priorum extrema B, C ducantur rectae D B, D C: erunt inaequalia triangula D A B, D A C, et majus D A B, quod majori A B insistit; et anguli A D B, A D C inaequales, major quodem A D B ad eas rectae A D partes, ad quas est major recta A B.

Cui affine hoc, respondens Theoremati XIII. (§. 48.):

Si e puncto extra triangulum non aequicrus sumto ad ipsius verticem ducta recta aequales cum cruribus faciat angulos: ex eodem puncto ad extrema basis ductae rectae inaequalia terminabunt triangula, quorum majus erit illud, quod majori cruri insistit; et cum ducta priori inaequales facient angulos, quorum major erit ad eas partes, ad quas crus majus.

Sit triangulum non aequicrus A B C, et e puncto D extra ipsum sumto ad verticem A ductae rectae cum cruribus A B, A C faciant aequales angulos D A B, D A C, et ex eodem puncto ad basis extrema B, C ducantur rectae D B, D C: erunt triangula D A B, D A C inaequalia, majus quidem D A B; et anguli A D B, A D C inaequales, major A D B.

§. 216.

Ad Quaestiones I, II, III. communiter,

Theoremati XV. (§. 50.) hoc respondebit contrarium:

Si cum aliqua recta in uno ejus extremo et ad diversas ipsius partes ductae duae aliae rectae faciant aequales angulos, inter se autem inaequales sint, et

harum extrema cum reliquo prioris extremo jungantur lineis rectis: eae triangula terminabunt inaequalia, quorum majus erit id, quod majori inaequalium rectarum adjacet; et cum priori recta inaequales facient angulos; majorem quidem ea, quae ad majoris rectae extremum ducta est.

Et Theoremati XVI. (§. 51.) hoc:

Si basi communi ad diversas partes insistant duo triangula, quae latus quidem lateri inaequale habeant, quod uni basis extremo adjacet; angulum vero angulo aequalem, qui eidem extremo adjacet: ea inter se inaequalia erunt, majus quidem, quod habet majus laterum dictorum; et reliquos ad basin angulos inaequales habebunt, majorem quidem rursus idem, quod habet majus latus.

Et Theoremati XVII. (§. 52.) hoc:

Si duo triangula lateri communi utrinque adjacentia reliquum latus reliquo inaequale habeant, sed ad commune latus in eodem ejus extremo sub aequali angulo applicatum: ea inter se inaequalia erunt, majus quidem, quod habet majus laterum dictorum; et reliquos angulos, qui communi lateri ad basin adjacent, inaequales habebunt; majorem quidem item illud, quod majus latus habet.

§. 217.

Ad Quaestionem quartam.

Theorematì XVIII. (§. 54.) hoc respondebit contrarium:

Si rectae alicui terminatae in duobus ejus extremis et ad diversas partes duae aliae rectae insistant sub angulis aequalibus, ipsae autem inter se inaequales sint; et earum termini cum alternis prioris rectae ex-

tremis jungantur: hae inaequalia terminabunt triangula, quorum majus majori inaequalium rectarum adjacet; et inaequales cum priori recta angulos facient, quorum major est ad eas partes, ad quas major recta.

Fig. 102. Rectae AB terminatae in ejus extremis A, D et ad diversas partes insistant duae rectae A C, BD sub angulis BAC, ABD aequalibus, ipsae autem inaequales sint, et major AC; et jungantur BC, AD: erit triangulum CAB majus triangulo DAB, et angulus ABC major angulo BAD.

Et Theoremati XIX. (§. 55.) hoc:

Si e duobus punctis ad diversas alicujus rectae partes sitis duae rectae ad unum atque alterum hujus extremum ductae faciant aequales cum ipsa angulos, ipsae autem inter se inaequales sint: ex iisdem punctis ad alterna prioris extrema ductae rectae facient inaequales cum ipsa angulos, majorem quidem ea, quae ex eodem puncto, e quo major inaequalium rectarum, ducta est; et inaequalia terminabunt triangula, quorum majus eidem illi puncto adjacet.

E duobus punctis C, D ad diversas rectae AB partes sitis duae rectae ad unum atque alterum hujus extremum ductae CA, DB faciant cum ipsa angulos aequales CAB, DBA; ipsae autem inter se inaequales sint: ex iisdem punctis C, D ad alterna prioris AB extrema ductae rectae CB, DA facient inaequales cum ipsa angulos CBA, DAB; majorem quidem CBA ea CB, quae ex eodem puncto C, e quo major CA inaequalium rectarum, ducta est; et inaequalia terminabunt triangula CAB, DAB, quorum majus CAB eidem illi puncto C adjacet.

Et Theoremati XX. (§. 56.) hoc:

Si basi communi ad diversas partes duo insistant triangula, quae angulum quidem angulo aequalem habeant ad duo basis extrema, latus autem lateri inaequale, quod illi angulo adjacet: ipsa quoque triangula erunt inaequalia, majus quidem id, quod habet majus latus; et idem reliquum ad basin angulum majorem habebit.

Basi communi A B ad diversas ejus partes insistant triangula CAB, DAB, habentia angulos quidem CAB, DBA aequales, latus autem AC majus latere DB: erit et triangulum CAB majus triangulo DBA, et ex angulis ad basin reliquis angulus CBA major DAB. *Fig. ead.*

Et Theoremati XXI. (§. 57.) hoc:

Si duo triangula lateri communi utrinque adjacentia in duobus ejus extremis angulum quidem angulo aequalem habeant, reliquum autem latus reliquo lateri inaequale, quod illi angulo adjacet: ipsa triangula erunt inaequalia, majus quidem id, quod habet majus latus; et idem reliquum angulum reliquo majorem habebit eum, qui communi lateri adjacet.

Et Theoremati XXII. (§. 58.) hoc:

Si quadrilateri duo latera opposita inaequalia sint, sed ad eandem diagonalem aequaliter inclinata: quadrilaterum illa diagonali in inaequalia sectum erit, et major portio erit ad partes majoris laterum dictorum; et reliqua latera opposita ad eandem diagonalem inaequalibus angulis inclinata erunt, quorum major item ad partes majoris lateris.

Quorum duorum erit expositio expedita ad superiorem figuram.

Et Theoremati XXIII. (§. 59.) hoc:

Si in duas rectas lineas incidens recta angulos alternos aequales fecerit, et ab ipsis segmenta inaequalia abscindantur his angulis adjacentia: rectae, quae horum segmentorum extrema cum punctis incidentiae jungunt, inaequalia terminabunt triangula, majus quidem, quod majori segmentorum dictorum adjacet; et inaequales cum incidente facient angulos, majorem item ad eas partes, ad quas majus segmentum est.

Fig. 103. In duas rectas EF, GH incidens recta AB faciat alternos angulos BAE, ABH aequales, et ab ipsis segmenta inaequalia abscindantur AC, BD, quorum majus sit AC: junctae BC, AD terminabunt triangula ABC, BAD inaequalia, majus quidem ABC, quod majori segmento AC adjacet; et inaequales cum incidente AB facient angulos CBA, DAB, majorem quidem CBA ad partes majoris segmenti AC.

§. 218.

Theoremati XXIV. (§. 60.) respondebit hoc:

Si alicui rectae in ipsius extremis ad diversas partes insistant duae perpendiculares inaequales: quae ab earum terminis ad alterna prioris rectae extrema ducuntur rectae, priori rectae ad inaequales insistent angulos, ad majorem quidem ea, quae e majoris perpendicularis termino ducitur; et inaequalia terminabunt triangula, quorum majus majori perpendiculari adjacet.

Fig. 104. Rectae AB in ipsius extremis A, B, et ad diversas partes insistant perpendiculares inaequales AC, BD, major AC; ductae ab earum terminis C, D ad alterna extrema rectae CB, DA insi-

stent ipsi AB ad angulos inaequales CBA, DAB; ad majorem CBA ea, quae ex majoris CA termino ducta est, CB; et triangula terminabunt inaequalia ACB, ADB, quorum majus est ACB majori perpendiculari AC adjacens.

Et Theoremati XXV. (§. 61.) hoc:

Si quadrilateri duo latera opposita inaequalia sint et diagonali perpendicularia: inaequales erunt anguli, quibus reliqua duo latera ad eandem diagonalem inclinantur; major quidem ad eas partes, ad quas est majus laterum inaequalium; et ad easdem partes major erit portio quadrilateri.

§. 219.

Theoremati XXVI. (§. 62.) hoc respondebit:

Si ad diversa rectae alicujus extrema e duobus punctis ad diversas illius partes sitis ductae duae rectae aequaliter inclinatae, inter se autem inaequales fuerint; ex iisdem autem punctis duarum ad alterna prioris extrema ductarum una illi sub angulo recto insistat: si quidem ea ex eodem puncto, e quo major inaequalium, ducta sit; reliqua sub angulo acuto insistet: si vero ex eo puncto, e quo minor; sub angulo obtuso.

Ad rectae AB extrema diversa e punctis duobus C, D ad diversas illius partes sitis ductae CA, DB aequaliter inclinatae, ipsae autem inaequales sint; aliarum autem ex iisdem punctis ad alterna extrema ductarum rectarum CB, DA una CB rectae priori AB sub angulo recto insistat: Dico: si quidem CA sit major inaequalium, alteram DA sub angulo acuto rectae AB insistere: si vero CA minor inaequalium sit, sub angulo obtuso. *Fig. 105.a.b.*

Et Theoremati XXVII. (§. 63.) hoc:

Si quadrilateri duo latera opposita inaequalia sint, sed ad diagonalem aequaliter inclinata; sit autem reliquorum laterum unum eidem diagonali perpendiculare: si quidem id ad easdem diagonalis partes, ad quas majus latus, situm sit, alterum faciet acutum cum ea angulum: si vero ad eas, ad quas minus latus; obtusum.

§. 220.

Ad Quaestionem quintam.

Theoremati XXVIII. (§. 65.) hoc respondebit contrarium:

Si rectae alicui terminatae in extremis ejus et ad easdem ipsius partes sub aequalibus angulis insistant rectae duae inaequales, et a terminis insistentium ad alterna prioris rectae extrema ducantur rectae: eae inaequalia terminabunt triangula, quorum majus erit illud, quod majori insistentium adjacet; et cum priori recta inaequales facient angulos, quorum major erit is, quem recta a termino majoris insistentis ducta facit.

Fig. 106. a. Rectae terminatae AB in extremis ejus A, B et ad easdem partes sub aequalibus angulis CAB, DBA insistant rectae inaequales CA, DB, quarum major CA, et ab insistentium terminis C, D ad alterna prioris rectae extrema B, A ducantur rectae CB, DA: eae inaequalia terminabunt triangula CAB, DBA, quorum majus CAB, quod majori CA insistentium adjacet; et cum recta AB inaequales facient angulos CBA, DAB, quorum major is CBA, quem recta e majoris insistentis CA termino C ducta facit.

Casus

Casus autem hic plures sunt. Aut enim recta B D cadit extra angulum A B C (fig. a.) aut secundum ipsam B C (fig. b.), quo casu punctum D inter C et B cadet, ut postea ostendemus; aut intra angulum A B C; et tum recta B D aut intra triangulum A C B finietur, (fig. c.) aut ad rectam A C usque pertinget (fig. d.) aut ultra illam transibit (fig. e.).

Jam ad fig b, c, d. manifestum est, triangulum C A B majus esse triangulo D A B, totum parte; itemque ad fig. b. angulum C B A seu D B A, cum ex hyp. aequalis sit angulo C A B, majorem esse angulo D A B; et ad fig. c. cum sit angulus C B A major D B A, qui aequalis C A B per hyp., esse et angulum C B A majorem angulo C A B, et hinc a fortiori majorem angulo D A B; et ad fig. d. cum sit angulus C B A major D B A; D B A autem aequalis C A B per hyp. seu D A B; esse et angulum C B A majorem D A B: quae ostendenda erant.

Ad fig. a, e. autem ostendetur producendo minorem B D ad E, ut fiat B E aequalis A C; tum jungendo A E. Et quia duae C A, A B duabus E B, B A aequales sunt, et angulus C A B angulo E B A (per hyp.): per El. prop. 4am erit et triangulum C A B triangulo E A B aequale, et angulus C B A angulo E A B. Itaque triangulum C A B majus erit triangulo D A B, et angulus C B A major angulo D A B; quod erat ostendendum.

Restat autem ad fig. b., quod sumsimus eo casu, quo recta B D secundum ipsam B C cadit, punctum D citra C casurum esse, id quia gratis sumi non potest, ut ostendamus.

Si enim punctum D non cadat citra D C; cadet aut in C aut ultra C.

Fig. 106, f. Cadat primo, si fieri potest, in C; ut sint duae rectae CA, CB aequaliter ad AB inclinatae, et AC major BC. Et a majori AC abscindatur AE aequalis BC, et jungatur BE. Quoniam igitur duae EA, AB duabus CB, BA aequales sunt, et angulus EAB angulo CBA: per prop. 4am erit et triangulum EAB aequale triangulo CAB, pars toti, quod fieri nequit. Non ergo punctum D cadere potest in ipsum punctum C.

Fig. 106, g. Nec ultra C cadere potest punctum D; ut sint rectae CA, DB aequaliter ad AB inclinatae, et AC major DB. Sit enim ita, si fieri potest: et a majori AC abscindatur AE aequalis BD; junganturque AD, BE. Et quia duae EA, AB duabus DB, BA aequales sunt, et angulus EAB angulo DBA: per prop. 4. erit triangulum EAB triangulo DAB aequale, pars toti: quod fieri nequit. Non ergo potest punctum D ultra C cadere: et ostensum est, quod nec in ipsum punctum C. Ergo citra C cadet: quod erat ostendendum.

Quam demonstrationem, etsi indirecta sit et aliquanto longiori circuitu egeat (utitur autem eadem argumentatione fere, qua Euclidea 6tae 1mi); tamen praetermittere hoc loco noluimus, ne ex omnibus Theorematis superioris casibus hic solus deesset aut imperfectus maneret. Sed in his, quae jam sequuntur, istam Casuum varietatem persequi supersedemus.

Theorematí igitur XXX. (§. 67.) hoc respondebit:

Si duo triangula communi basi ad easdem partes insistentia, ad diversa basis extrema angulum quidem angulo aequalem, sed latus lateri inaequale habeant:

ipsa triangula inter se inaequalia erunt, majus quidem, quod majori lateri adjacet; et reliqui ad basin anguli inaequales erunt, major quidem in eo triangulo, in quo est majus latus.

Et Theoremati XXXI. (§. 68.) hoc:

Si quadrilateri duo latera opposita aequalibus ad basin angulis inclinentur, sint autem inter se inaequalia: ductis duabus diagonalibus, triangula, quae communi basi insistunt et illis lateribus adjacent, inaequalia erunt, majus quidem, quod majori lateri adjacet; et diagonales ab basin inaequalibus inclinabuntur angulis, majori quidem ea, quae ab extremo basis ad extremum majoris lateris ducta est.

Theoremati XXXII. (§. 69.) quod contrarium respondeat, lectori ipsi, cui placuerit, investigandum relinquimus.

§. 221.

Similiterque Theorematis XXXIII, XXXIV, XXXV, XXXVI. §. 70 — 73. quae

Contraria respondeant, facile invenietur, et ad eam rem comparari poterunt, quae supra §. 218. data sunt Theorematis XXIV. — XXVII. contraria.

§. 222.

Ad Quaestionem VI.

Theoremati XXXVII. (§. 75.) hoc respondebit contrarium:

Si a duabus rectis angulum comprehendentibus abscissa sint inde ab ejus vertice segmenta aequalia, et ab eorum extremis ad alternas rectas ductae intra illum angulum rectae inaequalia ab ipsis segmenta ver

tici adjacentia abscindant: eae inaequalia terminabunt triangula, quorum majus erit, quod majori segmentorum inaequalium adjacet; et in extremis segmentorum aequalium facient angulos internos inaequales, quorum major erit is, qui majori inaequalium segmentorum opponitur.

Fig. 107. a..b. Sint a duobus rectis angulum ad. A comprehendentibus abscissa inde a vertice A segmenta aequalia AB, AC, et ab horum extremis B, C ad alternas rectas ductae intra illum angulum rectae BD, CE inaequalia abscindant segmenta vertici adjacentia AD, AE: erunt triangula ABD, ACE inaequalia, majus quidem illud, quod majori segmento AD adjacet, ABD; et anguli ABD, ACE inaequales, et major is, qui majori AD segmentorum inaequalium opponitur, ABD.

Theoremati XXXVIII. (§. 76.) hoc:

Si intra angulum a duobus crurum punctis ab ejus vertice aeque distantibus ad alia duo crurum alternorum puncta ab vertice inaequaliter distantia ducantur duae rectae: eae inaequalia terminabunt triangula vertici adjacentia, majus quidem ea, quae ad punctum a vertice remotius ducta est; et inaequalibus angulis internis ad crura in punctis a vertice aeque distantibus inclinabuntur, majori quidem ea, quae ad remotius punctum ducta est.

§. 223.

Theoremati XLI. (§. 78.) hoc respondebit contrarium:

Si cruribus trianguli aequicruris inaequalia duo inde a vertice abscissa fuerint segmenta, et ex eorum

terminis ad opposita basis extrema ducantur rectae: eae inaequalia terminabunt triangula habentia communem cum priori triangulo verticem, majus quidem ea, quae a termino majoris segmenti ducitur; et ad crura in extremis basis inaequalibus inclinabuntur angulis, majori quidem rursus ea, quae a termino majoris segmenti ducta est.

A trianguli aequicruris ABC cruribus AC, AB inaequalia inde a vertice abscissa sint segmenta AD, AE, et ex eorum terminis D, E ad opposita basis extrema ducantur rectae DB, EC: erunt triangula ABD, ACE inaequalia, majus quidem ABD, quod terminat recta DB a majoris segmenti AD termino D ducta; et anguli ABD, ACE inaequales, major quidem ABD, quo rursus recta DB ad crus AB in basis extremo B inclinatur. *Fig. b.*

Et Theoremati XLII. (§. 79.) hoc:

Si a cruribus trianguli aequicruris ultra basin continuatis abscissa fuerint segmenta inaequalia vertici adjacentia, et ex horum terminis ad opposita basis extrema ducantur rectae: eae inaequalia terminabunt triangula habentia communem cum priori triangulo verticem, majus quidem, quod majori segmento adjacet; et inaequales facient angulos cum ipsis cruribus in extremis basis; majorem quidem eum, qui majori segmento subtenditur.

A trianguli aequicruris ABC cruribus AC, AB ultra basin BC continuatis abscissa sint segmenta vertici adjacentia AD, AE inaequalia, quorum majus AD; et ex horum terminis D, E ad opposita basis extrema B, C ducantur rectae DB, EC: erunt triangula, quae terminant, ABD, ACE inaequa- *Fig. a.*

lia, et majus ABD, quod majori segmento AD adjacet; et anguli ABD, ADB inaequales; major quidem ABD, qui majori segmento AD subtenditur.

§. 224.

Sequentes Capitis IIdi tenorem, quoniam in illo extremo §. 82 — 88. ipsius propositionis 4tae Euclidis propositae sunt aliae enuntiationes; hic etiam ejus, quae propositioni 4tae contraria proposita est §. 208., et est hujus Capitis primaria, sub qua sequentia omnia continentur; ejus igitur hic etiam varietas aliquas enuntiationes afferemus.

Itaque enuntiationibus §. 82. vel 83. haefere respondent:

Si intra duos aequales angulos ductae duae rectae segmenta crurum abscindant unum quidem uni aequale, alterum vero alteri inaequale: eae triangula terminabunt inaequalia, quorum majus erit id, quod majori ex inaequalibus crurum segmentis adjacet; et ad aequalia segmenta inaequalibus inclinabuntur angulis, majori quidem eo, qui opponitur majori segmentorum inaequalium.

Fig. 108. Intra angulos ad A et D aequales ductae duae rectae BC, EF segmenta crurum abscindant unum quidem AB uni DE aequale, alterum vero AC alteri DF inaequale, puta majus: eae terminabunt triangula ABC, DEF inaequalia, quorum majus erit ABC id, quod majori AC ex inaequalibus crurum segmentis adjacet; et ad aequalia segmenta AB, DE inaequalibus inclinabuntur angulis ABC, DEF, et major erit ABC, qui opponitur majori AC segmentorum inaequalium.

Vel si duabus rectis angulum facientibus aliae duae rectae, una quidem uni aequalis, altera vero alteri inaequalis sit: rectae, quae priorum, quaeque posteriorum extrema jungunt, inaequalia terminabunt triangula, majus quidem illud, quod majori inaequalium rectarum adjacet; et cum aequalibus rectis inaequales facient angulos, majorem quidem eum, qui subtenditur majori rectae ex duabus inaequalibus.

§. 225.

In Capite III. Theorematis I. Casui Imo. haec duo respondebunt contraria:

1mo. Si rectae alicui terminatae duae rectae (sive ad easdem, sive ad diversas illius partes), una in uno illius extremo, altera in puncto, in quo illa bifariam secta est, insistant, inter se quidem inaequales, facientes autem angulum angulo aequalem, quem altera cum altero illius rectae segmento faciunt: quae e termino prioris insistentis ad punctum bisectionis, et e termino posterioris insistentis ad alterius segmenti terminum ducuntur rectae, inaequalia terminabunt triangula, quorum majus majori insistentium adjacet; et cum duobus segmentis inaequales facient angulos, quorum major majori insistentium subtenditur.

Rectae AD terminatae et in B bifariam sectae in extremo A et in puncto B (sive ad easdem, sive ad diversas partes) insistant rectae inaequales AC, DE sub aequalibus angulis CAB, EBD; et jungantur rectae CB, ED. Si CA major sit insistentium, erit triangulum ABC majus triangulo BDE, et angulus CBA major angulo EDB. *Fig. 109.*

2do. Si rectae alicui terminatae duae rectae (sive ad easdem, sive ad diversas illius partes) una in uno illius extremo, altera in puncto ejus intermedio, in quo in inaequalia segmenta dividitur, insistant, aequales inter se et aequalibus angulis altera ad alterum segmentum inclinatae: quae a termino prioris insistentis ad punctum intermedium, et a termino posterioris ad alterius segmenti terminum ducuntur rectae, inaequalia terminabunt triangula, quorum majus majori segmento insistet; et cum insistentibus inaequales facient angulos, quorum major majori segmento opponitur.

Fig. 110. Rectae AD terminatae et in puncto B in inaequalia segmenta divisae in extremo A et in puncto B (sive ad easdem, sive ad diversas partes) insistant duae rectae CA, EB aequales et sub angulis CAB, EBD aequalibus: si sit AB majus segmentum, erit triangulum ABC majus triangulo BDE, et angulus ACB major angulo BED.

§. 226.

Casui IIdo. haec respondebunt:

1mo. Si rectae alicui terminatae in ipsius extremis (sive ad easdem, sive ad diversas partes) insistant duae rectae inaequales sub angulis aequalibus, et ab harum terminis ad punctum, in quo prior recta bifariam divisa est, ducantur lineae rectae: eae inaequalia terminabunt triangula, quorum majus majori insistentium adjacet; et inaequalibus ad priorem rectam inclinabuntur angulis, majori quidem ea, quae a termino majoris recta ducta est.

Rectae AD terminatae et in puncto B bifariam sectae in ipsius extremis A et D (sive ad easdem, sive ad diversas partes) insistant rectae inaequales AC, DE sub angulis CAD, EDA aequalibus, et ab ipsarum terminis C, E ad punctum B ductae sint rectae CB, EB: si sit AC major insistentium; erit triangulum ACB majus triangulo BED; et angulus ABC major angulo DBE. *Fig. 111.*

2do. Si rectae alicui terminatae in ipsius extremis, et ad easdem aut diversas partes, insistant rectae aequales sub angulis aequalibus, et ab harum terminis ad punctum aliquod, in quo prior recta in inaequalia segmenta divisa est, ducantur rectae lineae: eae inaequalia terminabunt triangula, quorum majus majori segmento insistit; et ad insistentes inaequalibus inclinabuntur angulis, quorum major majori segmento opponitur.

Rectae AD in puncto B in inaequalia segmenta divisae, in ipsius extremis A, D et ad easdem aut diversas ipsius partes, insistant rectae AC, DE aequales et sub angulis aequalibus CAB, EDB; et ab harum terminis C, E ad punctum B ducantur rectae CB, EB: Si AB sit majus segmentum, erit triangulum ACB majus triangulo BED, et angulus ACB major angulo BED. *Fig. 112.*

§. 227.

Casui IIItio haec respondebunt:

1mo. Si a puncto, in quo recta aliqua bifariam divisa est, duae inaequales rectae sub angulis, quos altera cum altero segmento faciunt, aequalibus eductae sint (sive ad easdem, sive ad diversas partes,) et ab

harum terminis ad extrema illius rectae intra dictos angulos rectae lineae ducantur: eae inaequalia terminabunt triangula, quorum majus majori eductae adjacet; et inaequalibus ad priorem rectam angulis inclinabuntur, majori quidem ea, quae a termino majoris ducta est.

Fig. 113. Recta A D bifariam secta sit in B, et ex B eductae sint duae inaequales rectae B C, B E sub angulis C B A, E B D aequalibus; et ex earum terminis C, E intra dictos angulos ad extrema rectae A B ducantur rectae C A, E D: si fuerit B C major B E; erit triangulum A B C majus B D E, et angulus B A C major B D E.

2do. Si a puncto, in quo recta aliqua in inaequalia segmenta dividitur, duae aequales rectae (sive ad easdem, sive ad diversas prioris partes,) sub angulis aequalibus, quos altera cum altero segmento faciunt, eductae sint, et ab harum terminis ad extrema prioris rectae intra dictos angulos ductae sint rectae lineae: inaequalia terminabunt triangula, quorum majus majori segmento insistit; et angulos cum eductis inaequales facient, majorem quidem cum majori educta.

Fig. 114. Recta A D in B in inaequalia segmenta divisa sit, et ex puncto B eductae sint duae aequales rectae B C, B E sub angulis C B A, E B D aequalibus, et junctae rectae C A, E D: si fuerit A B majus segmentum; erit triangulum A B C majus B E D, et angulus A C B major B E D.

§. 228.

Propositioni Theoremata I, II, III. Capitis III. complectenti (§. 103. 104.) haec respondebunt contraria:

1mo. Si ad expositam rectam aliquam e duobus punctis extra ipsam sumtis (sive ad easdem, sive ad diversas expositae partes) ductae duae rectae et inter se aequales sint, et angulum angulo aequalem faciant, quem cum exposita recta comprehendunt ad partes alterutras; et ex iisdem duobus punctis aliae duae ad expositam ductae rectae segmenta ab ipsa abscindant inaequalia adjacentia prioribus ductis ad partes angulorum aequalium: eae inaequalia terminabunt triangula, quorum majus majori segmento insistit; et cum prioribus ductis inaequales comprehendent angulos, majorem quidem eum, qui majori segmento opponitur.

2do. Si in exposita recta duo segmenta sumta sint inter se aequalia, duobus sumtis in ea punctis adjacentia, et ex iisdem punctis eductae sint rectae inter se inaequales, aequalibus autem angulis ad dicta segmenta inclinatae: quae segmentorum sumtorum extrema cum eductarum rectarum terminis jungunt rectae, inaequalia terminabunt triangula, quorum majus majori eductae adjacet; et ad segmenta inaequalibus angulis terminabuntur, quorum majorem major educta subtendit.

§. 229.

Propositioni (§. 108.) sistenti Theorematis IV. Cap. III. Casum II, hae respondebunt contrariae:

1mo. Si e duobus punctis ad easdem aut diversas rectae alicujus terminatae partes sumtis, tam ad duo

ejus extrema (ex altero nempe puncto ad alterum extremum,) quam ad aliud punctum in ipsa sumtum binae rectae ductae sint, quarum priores duae aequales sint, et cum posterioribus duabus aequales faciant angulos, posteriores autem duae inaequales sint: erunt et triangula, quae binis ex utroque puncto ductis et segmentis primae rectae continentur, inaequalia, majus quidem id, quod majori ex posterioribus adjacet; et anguli, quibus priores ductae ad primam rectam inclinantur, inaequales, major quidem is, qui majori ex posterioribus subtenditur.

2do. Si e duobus punctis ad easdem rectae expositae terminatae partes sumtis, tam ad duo ejus extrema, quam ad aliud punctum intermedium inipsa sumtum binae rectae ductae sint, quarum posteriores (quae nempe ad punctum intermedium ductae) aequales sint et cum prioribus duabus (iis, quae ad extrema ductae,) faciant angulos aequales, priores autem inaequales sint: erunt et triangula, quae a binis ex utroque puncto ductis et a segmentis primae rectae continentur, inaequalia, majus quidem, quod majori ex prioribus adjacet; et anguli, quibus posteriores ad primam rectam inclinantur, inaequales, major quidem is, qui majori ex prioribus subtenditur.

§. 230.

Propositioni (§. 114. vel 116.) Theoremata IV, V, VI. Capitis III. continenti, haec respondebit contraria:

Si duae rectae, ex uno puncto exeuntes, et in eo facientes angulum, et duae aliae ex alio puncto exeuntes, duabus prioribus, una quidem uni aequalis, altera

vero alteri inaequalis, angulum autem facientes priori angulo aequalem, extremis suis tangant eandem expositam rectam: inaequalia erunt spatia a duabus prioribus et a duabus posterioribus super exposita recta contenta, majus quidem id, quod majori rectarum inaequalium adjacet; et inaequales erunt anguli, quibus duae aequales ad expositam inclinantur, major quidem is, qui opponitur majori inaequalium.

Vel: Si alicui expositae rectae in duobus ejus punctis insistant rectae aequales, et ab earum extremis aliae duae rectae ad expositam demissae sint, cum prioribus aequalem comprehendentes angulum, ipsae autem inter se inaequales: insistentes cum demissis inaequalia terminabunt spatia, quorum majus erit id, quod majori demissae adjacet; et insistentes ad expositam inaequalibus inclinabuntur angulis, (iis, qui ad partes demissarum jacent;) majori quidem ea insistens, cujus ab extremo major recta demissa est.

§. 231.

Reliquis Capitis IIIi. Theorematibus respondentia contraria non erit difficile invenire post ea, quae adhuc tractavimus, exempla. Itaque illis non immoramur, sed ea ad exercitationem eorum, quibus lubet, industriae relinquimus.

CAPUT VI.

Continet duas propositiones conversas quartae Elementorum; hoc est, tales, in quibus unum ex consequentibus quartae in locum unius ex antecedentibus substituitur, et hoc ipsum antecedens inter consequentia collocatur; et earum conversarum applicationes ad varias, quibus Theoremata Capitis II. et III. respondent, hypotheses et figuras. Praemittuntur aliqua de indirecto demonstrandi modo generatim.

§. 232.

In proximi Capitis prooemio (§. 205. s.) annotatum est: si propositionis alicujus contraria (eo, quem illic diximus, sensu; quae nempe antecedenti contrario contrarium etiam consequens esse pronunciet) vera sit;

veram quoque esse ejusdem propositionis conversam: Veluti, si propositionis, omne, A est B, contraria vera sit, ut omne, quod non sit A, non sit B; consequi etiam, omne B esse A: quia, si aliquid, quod est B, non esset A; cum omne non A nec sit B, idem etiam non esset B. Estque hoc demonstrationis genus indirectum, seu per deductionem ad impossibile seu apagogicum; cum posito, aliquid esse, alterum quiddam esse ex eo ostenditur, quod posterius non possit negari, quin aut ipsum prius tollatur, aut aliud quicquam verum et concessum evertatur.

§. 233.

Atque hoc ratiocinandi genus satis est etiam in communi vita sequens; et in multis accidit, ut id solum usurpari queat, ostensivum seu directum non queat. Ejus autem tota vis in eo consistit, ut, quo posito necesse foret aliquid esse, quod certo non est, illud ipsum non sit. Ut in media demonstratione quartae, cum Euclides evincit, (v. text. graec.) rectam B Γ rectae E Z congruere, id ex eo infert: quod, si non congruat, duae rectae lineae spatium comprehenderent; quod certo non possunt (cf. §. 21, e.). Sic in demonstratione sextae ostendit latera aequalia esse, quia, si forent inaequalia, fieri posset triangulum quoddam aequale alteri triangulo, cujus pars est: quod fieri nequit, cum omne totum sit parte sua majus.

§. 234.

Itaque mirari liceat, quid sit, cur multi ab illa demonstrandi ratione tamquam non modo nescio quid argutiae et difficultatis habente, et a communi sensu ab-

horrente, sed etiam prorsus falsa et paralogistica abhorruerint; cum nihil sit illo ratiocinandi genere in ipsa communi vita, ut jam diximus, usitatius. Sed nimirum inter ejus in communi vita et in scientia usum hoc interest, quod in illa, ut et aliae consequentiae plerumque, sic et haec falsi cujusquam vel *αδυνατε* vel *ατοπε* ex A posito quodam antecedente consecutio non longe repeti, nec per multa intermedia aut longo circuitu evinci soleat, sed ex proximo petatur, ex notis et concessis brevi argumentatione deducatur; in *επιςημονικαις* autem argumentationibus saepe longiori et per plura intermedia deductione opus sit, sive ut ostendatur, id, quod falsum et absurdum esse constat, ex eo, quod positum erat, consequi, sive ut id, quod consequi ostenditur, falsum et absurdum esse convincatur.

Sed huic posteriori difficultati medelam aliquando adhibet Euclides hanc, ut demonstrationem in duas propositiones dispescat: quarum in una praemittat et ostendat, illud, ad quod res in altera propositione deducetur, absurdum et *αδυνατον* esse; tum in altera propositionem primariam demonstret ex eo, quod, si illa non vera esset, consequeretur illud, quod in praemissa propositione *αδυνατον* esse ostenderat: qua ratione utitur in Libri I. prop. 8va cum praemissa ipsi 7ma; itemque in Libri III. prop. 24a cum praemissa 23a. Prior autem difficultas non est apagogicae ratiocinationis propria, sed ipsi cum directa et omni omnino *επιςημονικη* argumentatione commune: quae a vulgaribus in communi vita argumentationibus in eo potissimum differt, quod per plura media procedit, et non uno solo medio termino rem conficit. Quamquam illud etiam in

aliis

aliis praeter geometriam rebus, et quae non sunt *επιϛημονικȣ* generis, sed popularis captus et disceptationis, non ita raro fit, ut homines in cogitando versati et aliquanto plus ceteris videntes, cum rem aliquam disquirere velint, utrum ea vera, utrum ad finem propositum conducens, utrum factu possibilis, utrum facilis et expedita sit, an omnia contraria, in eo sic agant, ut non in una et proxima consequentia subsistant, ex qua de tota re judicent, sed ut plures et remotiores rei consequentias, et ut ita dicam, consequentiarum quoque consequentias, quae et ipsius rei consequentiae sunt, discutiant, et ex his demum judicium de ipsa re ferant: quo minus mirum aut a consueta ratione nimis alienum videri debet, si geometrae eodem modo agant.

§. 235.

Primo enim simplicissima indirectae ratiocinationis forma haec est, cum ad ostendendum, esse A, sic concludimus: Si non est A, est B: sed B non est: non ergo verum, ut non sit A: est ergo A; vel cum ad ostendendum, si Z sit, esse A, sic dicimus: Si enim Z sit et non A, erit ergo B; quod fieri nequit: est ergo A. Ut Euclides in demonstratione quartae: *Βασις ἡ ΒΓ επι βασιν την ΕΖ εφαρμοσει. Ει γαρ τȣ μεν Β επι το Ε εφαρμοσαντος, τȣ δε Γ επι το Ζ, ἡ ΒΓ βασις επι την ΕΖ ȣκ εφαρμοσει· δυο ευθειαι Χωριον περιεξȣσιν· ὁπερ αδυνατον. Εφορμοσει αρα ἡ ΒΓ βασις επι την ΕΖ.* Et in demonstratione 8vae sic: *Εφαρμο της ΒΓ επισασηι την ΕΖ, εφαρμοσȣσι και αἱ ΒΑ, ΑΓ επι τας ΕΔ, ΔΖ. Ει γαρ βασις μεν ἡ ΒΓ επι βασιν την ΕΖ εφαςμοσει, αἱ δε ΒΑ, ΑΓ πλευραι επι τας ΕΔ, ΔΖ*

πλευρας ουκ εφορμοσουσιν — — συσαθησονται επι της αυτης — — περατα εχουσαι. Ου συνισανται δε. Ουκ αρα, εφαρμοσασης της ΒΓ βασεως επι την ΕΖ βασιν, ουκ εφαρμοσουσι και αἱ ΒΔ, ΔΓ πλευραι επι τας ΕΔ, ΔΖ. Εφαρμοσουσιν αρα.

§, 236.

Proxima indirectae demonstrationis forma, uno termino longior, hunc in modum proceditur. Ostendendum sit, si sit Z, esse A; et ostendatur sic: Si, cum sit Z, non sit A; erit B; si autem B, erit et C, sed C non est. Non ergo, cum sit Z, non erit A: ergo erit A.

Atque ad hanc fere formam redit Euclidis demonstratio sextae 1mi: Si triangulum habeat duos angulos aequales, habere et latera, quae ipsos subtendunt, aequalia. Si enim ea non habeat aequalia; erit unius eorum segmentum quoddam alteri aequale: si unius segmentum sit alteri aequale, erit et triangulum quoddam triangulo cuidam aequale, pars toti. Sed non est aequalis pars toti: non ergo triangulum habens duos angulos aequales, habebit latera, quae ipsos subtendunt, non aequalia: ergo aequalia.

Potest autem haec ratiocinatio resolvi in duas partes, quae sint prioris simplicioris formae; quarum prima erit: si, cum sit Z, sit B; erit et C: sed non est C; ergo nec B. Altera haec erit: si, cum sit Z, non sit A; erit B: sed non est B, per modo ostensa: Ergo erit A. Pariterque demonstratio sextae resolvetur in duas conclusiones, quarum prior haec: si triangulum habens duos angulos aequales; habeat segmentum unius lateris alteri lateri aequale; erit triangulum quod-

dam triangulo cuidam aequale, cujus pars est. Sed non est pars aequalis toti. Non ergo triangulum habens duos angulos aequales, habebit segmentum unius lateris alteri lateri aequale. Altera haec erit: si triangulum habens duos angulos aequales, habeat duo altera, quae ipsos subtendunt, non aequalia; habebit segmentum unius lateris alteri lateri aequale. Sed non habet segmentum unius lateris alteri lateri aequale, per prius ostensa. Ergo non habebit latera non aequalia: aequalia igitur.

§. 237.

Rursus accedat unus terminus, quo longior sit argumentatio, hunc in modum: si, cum sit Z, non sit A; erit B. Si B; erit et C. Si C; erit et D. Sed non est D. Non ergo non erit A; erit ergo A. Vel si per omnes retrogredi argumentationis terminos velis: ex eo, quod non est D, consequetur proxime: ergo nec C: (si enim esset C; D quoque foret; quod non est) hinc vero nec erit B: (alioqui foret et C; quod non est, per ostensum) hinc non denique non erit A; erit ergo A. Et similiter, si fuerint plures termini. Sed is, cui propositum erat demonstrare, esse A, posteriorem conclusionem satis habet; reliquas, nempe non esse C, non esse B, ut supervacaneas praetermittit: itaque faciunt geometrae.

Hujus fere formae erit demonstratio 1ae Libri III. Elementorum, si sic proponatur: si centrum circuli non sit in recta ductam aliquam in circulo rectam lineam bifariam et ad angulos rectos secante: erit in puncto extra ipsam. Si sit in puncto extra ipsam: ducta ex hoc ad punctum dictae sectionis recta, ipsa

quoque ductae in circulo rectae ad aequales, ac proinde rectos angulos insistet. Si haec huic ad angulos rectos insistit: erunt duo inaequales auguli recti. Non autem possunt esse inaequales duo anguli recti, quia recti omnes aequales. Non ergo centrum circuli non erit in recta ductam in circulo rectam lineam bifariam et ad angulos rectos secante: erit ergo in hac recta; quod erat ostendendum.

Et potest rursus superior argumentatio in tres vel etiam in duas resolvi. In tres quidem sic: ut prima asserat non esse C, quia si C, etiam D foret, quod non est; secunda dicat, non esse B; quoniam, si B, etiam C foret; quod non est per primo ostensum; tertia denique proponat, esse A, quoniam, si non sit A, B foret; quod non est, per proxime praemissam. In duas autem vel sic, ut prima asserat non esse C, eadem ratione qua modo; secunda esse A, ex eo, quod, si non sit A, B foret, et hinc C foret; quod non est: vel sic, ut prima asserat non esse B, quia, si foret, etiam C, hincque D foret, quod non est; deinde altera inferat, esse A, quod, si non sit, B foret: quod non est.

Sic Euclidis demonstrationem 7mae Lib. I. secundum eum casum, quem exhibet textus graecus, licebit in duas propositiones dispertiri, quarum prima erit: Non posse eidem basi ad easdem ipsius partes duo insistere triangula aequicrura sic, ut utriusvis eorum vertex sit extra alterum; quia, illo posito, consequeretur in duobus angulis, ut unus altero et major sit et aequalis; quod fieri nequit. Altera erit ipsa 7ma secundum casum textus graeci: Non posse super eadem recta et ad easdem ipsius partes duas rectas ex

illius extremis ductas, ac duas alias ex iisdem ductas, quae prioribus aequales sint, altera alteri, et quidem ex eodem termino ductae, constitui ad aliud atque aliud punctum, sic ut una priorum unam posteriorum ex alterno extremo ductam secet: quia, si id fieri posset, eidem basi ad easdem partes insisterent duo triangula aequicrura, quorum utriusvis vertex esset extra alterum: quod fieri nequit per praemissam. Ac similiter reliquus 7mae Casus, qui in textu graeco omissus est, in duas propositiones dividi poterit, quarum prima est: Eidem basi ad diversas ipsius partes non posse insistere duo triangula aequicrura, quorum unum habeat verticem extra spatium inter producta alterius trianguli infra basim crura contentum; Altera: Non posse super eadem recta et ad easdem ipsius partes duas rectas duobus illius extremis terminatas, et duas alias, quae illis aequales sint, altera alteri, eodem quidem extremo terminatae, ad aliud atque aliud punctum constitui, sic ut neutra posteriorum eam priorum, quae alterno extremo terminata est, secet.

§. 238.

Etsi autem non defuere, qui hoc apagogico demonstrationis genere supersedere mallent, atque illud adeo ut falsum et paralogisticum rejicerent (v. Chrestom. geom. p. 298.): certum tamen est, eo careri in geometria nequaquam posse. Itaque Rob. Simson ad demonstrationem III, 1. annotat, ibi non aliam praeter apagogicam demonstrationem locum habere. Et exstat perelegans Savilii ad Ios. Scaligerum epistola, in qua ille necessitatem hujus argumentandi generis vindicat et tuetur (v. ib. pag. 211. sqq.).

§. 239.

Sed ut ad ea accedamus, quae in fronte Capitis hujusce significavimus, indirecto illo argumentandi genere demonstrabuntur jam duae propositiones quartam Euclidis convertentes, quarum utramque per plures applicationes; persequemur respondentes iis, quae in capite 1 et 2do traditae sunt, applicationibus propositionis quartae: unde sequentia commode in duas partes distribuentur.

Pars *I.*

§. 240.

Propositio prior convertens quartam:

Si duo triangula latus lateri aequale habeant, et angulum angulo aequalem, qui illi lateri adjacet, et ipsa triangula inter se aequalia sint (seu aequalem aream habeant; seu si aequalia spatia comprehensa sint utriusque perimetro): habebunt et reliquum latus reliquo lateri aequale, quod dicto angulo adjacet, et basim basi aequalem, et angulos ad basin angulis ad basin aequales, tam eum, qui singulis dictorum aequalium laterum subtenditur, quam reliquum aequalibus lateribus adjacentem.

Fig. 12. Sint duo triangula ABC, DEF habentia latus AB lateri DE aequale, et angulum BAC angulo DEF aequalem, et ipsa inter se aequalia (seu aequalem aream habentia): dico reliquum quoque latus AC reliquo DF aequale esse, et basin BC basi EF aequalem, et angulum ACB angulo DFE aequalem, qui quidem aequalibus lateribus AB, DE subten-

duntur, et angulum A B C angulo D E F aequalem, qui sunt reliqui illis lateribus adjacentes.

Si enim latus A C lateri D F non sit aequale, ergo majus aut minus: erit et triangulum A B C triangulo D E F majus aut minus, per ea, quae Cap. praec. ostensa sunt §. 208. Sed aequale est, per hypothesin, triangulum triangulo. Non ergo latus A C lateri D F inaequale erit; ergo aequale.

Quoniam igitur latus A C lateri D F aequale est, per ostensa; sed et latus A B lateri D E per hypothesin: erunt duo latera B A, A C duobus lateribus E D, D F, alterum alteri, aequalia: et est etiam angulus B A C angulo E D F aequalis per hypothesin: Ergo per prop. 4tam etiam reliqua reliquis aequalia erunt, quae diximus.

§. 241.

Hinc consequentur theorematum capite 1°. traditorum conversa; et primum quidem hoc

Theorematis 1, (§. 32.) conversum:

Si a termino rectae angulum bifariam secantis ad rectas ipsum comprehendentes ductae duae rectae aequalia terminent triangula: eae aequalia ab illis rectis abscindent segmenta, et ipsae inter se aequales erunt, et tam cum recta angulum bifariam secante, quam cum duabus ipsum comprehendentibus aequales facient angulos.

Ad rectas angulum ad A comprehendentes e termino D rectae illum angulum bifariam secantis A D ductae duae rectae D B, D C aequalia terminent triangula D B A, D C A: eae aequalia ab *Fig. 17.*

illis rectis abscindent segmenta AB, AC, et ipsae DB, DC inter se aequales erunt, et facient aequales tam cum recta AD angulos ADB, ADC, quam cum rectis AB, AC angulos ABD, ACD.

Ostenditur vel per applicationem Theorematis §. prox. propositi directe: vel similiter, atque hoc, ex Cap. 5ti Theoremate, Euclidei 1mi contrario (§. 208.), indirecte.

Hinc et Theorematis 2di (§. 34.) conversum: Si diagonalis quadrilaterum tam ipsum, quam unum ejus angulum bifariam secet: aequalia erunt latera, quae illum angulum comprehendunt, et reliqua duo latera aequalia erunt, et angulus priori oppositus eadem diagonali bifariam divisus erit.

§. 242.

Sed et alterum Theorematis I. (§. 32.) conversum hoc erit:

Si angulum comprehendant duae rectae aequales, et ex earum terminis ad rectam illum angulum bifariam secantem ductae duae rectae aequalia terminent triangula: in idem illius punctum incident, et erunt inter se aequales.

Fig. 115. Angulum ad A comprehendant duae aequales rectae AB, AC, et ex earum terminis B, C ad rectam angulum BAC bifariam secantem ductae duae rectae aequalia terminent triangulas sitque una earum BD, quae ex B ducta est: ea, quae ex C ducitur, in idem punctum D incidet, et erit aequalis BD.

Si enim in aliud rectae AD punctum, quam D, incidat, ut in E; cum sint BA, AC aequales, et angulus BAD angulo CAE aequalis, rectae autem AD.

AE inaequales: erunt et triangula ABD, ACE inaequalia (§. 208.); quae per hyp. aequalia esse debebant. Non ergo recta ex C ducta in aliud quam D punctum incidit: ergo in ipsum punctum D; et erit CD aequalis BD, per ipsam prop. 4. Elem.

§. 243.

Theorematis III. (§. 36.) conversum hoc erit:

Si eadem recta et triangulum ipsum et ejus angulum ad verticem bifariam secet: triangulum erit aequicrus, et illa recta basin ad angulos rectos ac bifariam secabit.

Ostenditur aut directe per propositionem §. 240., aut indirecte ope propositionis §. 211.

§. 244.

Theorematum V. et VI. (§. 38. 39.) hoc erit conversum:

Si trianguli alicujus angulum ad verticem bifariam secet recta sive ultra basin producta, sive intra triangulum terminata; et ex ejus termino ad extrema basis ductae duae rectae aequalia terminent triangula, communem cum priori triangulo verticem habentia: erit illud triangulum aequicrus, et ductae duae rectae aequales erunt.

Item hoc:

Si trianguli aequicruris angulum ad verticem bifariam secet recta sive ultra basin producta, sive intra triangulum terminata; et ad ipsam e duobus basis extremis ductae duae rectae ae-

qualia terminent triangula, verticem communem cum triangulo aequicruri habentia: in idem illius rectae punctum incident, et inter se aequales erunt.

Et hoc:

Si trianguli aequicruris angulum ad verticem bifariam secet recta, sive ultra basin producta, sive intra triangulum terminata; et ex ejus termino ad duo trianguli crura ductae duae rectae aequalia terminent triangula communem verticem cum aequicruri habentia: si earum una incidat in unum basis extremum; altera quoque in alterum basis extremum incidet, et priori aequalis erit.

Ostenduntur haec indirecte ope §. 212. 213; directe consequuntur ex §. 240.

§. 245.

Theorematis VIII. vel IX. (§. 43. 44.) hoc erit conversum:

Si ad aliquam rectam lineam e puncto rectae ipsi perpendicularis et ad utrasque hujus perpendicularis partes ductae duae rectae aequalia terminent triangula: eae segmenta prioris rectae aequalia abscindent; et ipsae inter se aequales erunt; et ad priorem rectam, itemque ad perpendicularem aequalibus angulis inclinabuntur.

Vel brevius:

Si triangulum recta e vertice ad basin perpendiculari bifariam secetur: aequicrus erit, et basis et angulus ad verticem eadem perpendiculari bifariam secabuntur.

Et hoc:

Si rectae lineae terminatae in puncto, quo ipsa bifariam secatur, insistat recta perpendicularis, ad quam ex utroque prioris extremo ductae duae rectae aequalia terminent triangula: eae in idem perpendicularis punctum incident, et inter se aequales erunt.

Et hoc:

Si rectae lineae terminatae in puncto, in quo ipsa bifariam secatur, insistat recta perpendicularis, e cujus termino ad priorem rectam utrinque ductae duae rectae aequalia terminent triangula: si earum una in unum rectae illius extremum incidat; etiam altera in alterum illius extremum incidet.

Ostenduntur haec indirecte ope §. 214; directe per §. 240.

§. 246.

Theorematis XII. (§. 47.) hoc erit conversum:

Si extra aliquem angulum ad ipsius verticem posita sit recta linea cum rectis illum comprehendentibus faciens aequales angulos, et e puncto in ipsa sumto ad illas rectas ductae duae rectae aequalia terminent triangula: eae aequalia ab ipsis abscindent segmenta, et aequales tam cum posita exteriori, quam internos cum rectis angulum dictum comprehendentibus angulos facient.

Et hoc:

Si ad verticem anguli aequalibus rectis comprehensi et extra ipsum angulum posita sit recta, faciens cum illis aequales angulos ad utrasque partes, et ad

eam ex terminis aequalium ducantur duae rectae aequalia terminantes triangula: eae in idem rectae exterioris punctum incident, et inter se aequales erunt.

Et hoc:

Si ad verticem anguli aequalibus rectis comprehensi et extra ipsum angulum posita sit recta faciens cum illis aequales utrinque angulos, et ex hujus termino ad rectas priores ductae duae rectae aequalia terminent triangula: si earum una in unius rectarum aequalium extremum incidat; altera quaque in alterius extremum incidet, et priori aequalis erit.

Ostenduntur haec indirecte ope §. 215; directe per §. 240.

§. 247.

Theorematis XV. (§. 50.) cum aliqua locutionis variatione hoc erit conversum:

Si ad verticem alicujus anguli rectilinei et extra ipsum posita sit recta, e cujus puncto aliquo ductae duae rectae sub aequalibus utrinque ad ipsam angulis, occurrant rectis angulum illum comprehendentibus et aequalia terminent triangula: aequalia ab illis rectis segmenta abscindent, et aequalibus ad illas inclinabuntur angulis, et recta posita exterior aequales faciet angulos cum rectis priorem angulum comprehendentibus.

Et Theorematis XVI. (§. 51.) hoc:

Si eidem basi ad diversas partes insistant duo triangula aequalia, quae et angulum angulo aequalem habeant, qui eidem basis extremo adjacet: habebunt et latus lateri ad dictum basis extremum aequale, et

reliquum latus reliquo aequale, et reliquum ad basim angulum reliquo aequalem, et angulos ad verticem utriusque aequales.

Et Theorematis XVII. (§. 52.) hoc:

Si triangula duo aequalia communi lateri adjacentia ad diversas hujus lateris partes, angulum quoque angulo aequalem habeant, uni illius lateris extremo adjacentem et basi oppositum: habebunt et reliquum latus reliquo, et basim basi, et reliquum ad commune latus angulum reliquo aequalem, et angulos, qui communi lateri opponuntur, aequales.

Ostenduntur haec indirecte ope §. 216; directe per §. 240.

§. 248.

Theorematis XVIII. (§. 54.) hoc erit conversum:

Si rectae alicui terminatae in duobus ejus extremis et ad diversas partes duae aliae rectae insistant sub angulis aequalibus, et, quae ipsarum terminos cum alternis prioris rectae extremis jungunt rectae, aequalia terminent triangula: erunt et duae insistentes inter se aequales, et posteriores ductae aequales.

Theorematis XIX. (§. 55.) hoc:

Si e duobus punctis ad diversas alicujus rectae partes sitis duae rectae ad unum atque alterum hujus extremum ductae faciant aequales cum ipsa angulos; et, quae ex iisdem duobus punctis ad alterna prioris extrema ducuntur rectae, aequalia terminent triangula: erunt priores duae ductae rectae inter se aequales, et duae posteriores tum aequales erunt, tum aequales

cum priori recta, itemque cum duabus prioribus ductis facient angulos.

Theorematis XX. (§. 56.) hoc:

Si eidem basi ad diversas partes insistant duo triangula aequalia, habentia angulum angulo aequalem, qui diversis basis extremis adjacet: habebunt et latus lateri aequale, quod dicto angulo adjacet, et reliquum latus reliquo aequale, et reliquum ad basin angulum reliquo, et angulos ad vertices inter se aequales.

Theorematis XXI. (§. 57.) hoc:

Si duo triangula aequalia communi lateri ad diversas hujus partes adjacentia, angulum quoque angulo aequalem habeant ad diversa ejus lateris extrema: habebunt et reliquum latus reliquo aequale, et basin basi; et reliquum ad commune latus angulum reliquo; et angulos, qui lateri communi opponuntur, inter se aequales.

Theorematis XXII. (§. 58.) hoc:

Si diagonalis quadrilaterum bifariam secet, et cum oppositis duobus lateribus aequales faciat angulos: aequalia erunt bina ejus opposita latera, et anguli quadrilateri illi diagonali oppositi aequales erunt, et ii quoque, quos eadem diagonalis cum reliquis duobus lateribus oppositis facit, aequales erunt.

Theorematis XXIII. (§. 59.) hoc:

Si in duas rectas lineas incidens alia recta linea angulum angulo, qui sunt alterni, fecerit aequalem; et ex utroque punctorum, in quae incidit, intra angulum eum ex dictis, qui reliquo puncto adjacet, ductae duae rectae ad oppositas sibi rectarum priorum, aequalia terminent triangula: eae inter se aequales erunt, et aequalia a prioribus rectis abscindent segmenta

punctis incidentiae adjacentia; et aequales tam cum incidente, quam cum iis, ad quas ductae sunt, rectis prioribus facient angulos.

Haec omnia consequuntur indirecta argumentatione ex iis, quae §. 217. proposita sunt; directe per §.240.

§. 249.

Quibus et hoc addimus:

Si rectae lineae uno in extremo terminatae segmento huic extremo adjacenti, ut basi, insistat triangulum; et ad idem extremum et ad alteras illius rectae partes ducta sit recta aequalis lateri trianguli opposito, et aequalem, ac illud, cum basi faciens angulum; tum ex hujus ductae rectae termino ad rectam initio dictam ducatur recta terminans triangulum aequale dicto triangulo: ea in alterum basis extremum incidet, et reliquo trianguli lateri aequalis erit.

Recta sit AB in extremo A terminata, cujus segmento AC ut basi insistat triangulum ADC, et ad extremum A et ad alteras rectae AB partes ducta sit recta AE aequalis lateri trianguli ADC opposito CD, et faciens angulum EAB angulo ACD aequalem; tum ex hujus ductae termino E ad rectam AB ducatur recta terminans triangulum aequale triangulo ADC: dico, eam in alterum basis extremum C incidere, et aequalem esse lateri AD. *Fig. 116.*

Si enim in aliud punctum quam C incidat, ut in F: non erit triangulum AEF, quod illa terminat, triangulo ADC aequale. (§. 208.) Sed aequale est (hyp.), quod illa terminat triangulum, triangulo ADC. Itaque in ipsum punctum C incidit; et hinc per prop. 4. El. erit recta EC rectae AD aequalis.

§. 250.

Theorematis XXIV. (§. 60.) hoc erit conversum:

Si alicui rectae in ipsius extremis et ad diversas partes insistant duae perpendiculares terminatae, et, quae ipsarum terminos cum alternis prioris rectae extremis jungunt rectae, aequalia terminent triangula: erunt illae perpendiculares inter se aequales.

Cui affine Theorematis XXV. (§. 61.) hoc:

Si quadrilaterum bifariam secetur diagonali, cui perpendicularia sint duo opposita latera: ea inter se aequalia erunt.

Ostenduntur haec indirecte per §. 218; directe per §. 240.

§. 251.

Theorematis XXVII. (§. 63.) hoc erit conversum:

Si quadrilaterum bifariam secetur diagonali, ad quam duo opposita latera aequaliter inclinata sint, duorum vero reliquorum unum perpendiculare sit: etiam reliquum horum perpendiculare erit, et tam priora duo, quam posteriora duo opposita latera inter se aequalia.

Ostenditur ex §. 219. indirecte; ex §. 240. directe.

§. 252.

Theorematis XXVIII. (§. 65.) hoc erit conversum:

Si ad rectam reliquam terminatam in duobus ejus extremis et ad easdem partes inclinatae sint duae

duae rectae sub aequalibus angulis, et ex utroque prioris extremo ad oppositam ipsi inclinatam ductae duae rectae lineae aequalia terminent triangula: eae ipsae inter se aequales erunt, et ab inclinatis segmenta abscindent aequalia extremis terminatae adjacentia, et tam cum terminata, quam cum duabus inclinatis aequales facient angulos.

Theorematis XXX. (§. 67.) hoc:

Si eidem basi ad easdem ipsius partes duo insistant triangula aequalia, et angulum angulo aequalem habeant ad duo diversa basis extrema: habebunt et latus lateri aequale, quod illi angulo adjacet, et reliquum latus reliquo; et reliquum ad basin angulum reliquo; et angulos ad vertices invicem aequales.

Theorematis XXXI. (§. 69.) hoc:

Si quadrilateri duae diagonales aequalia terminent triangula basi insistentia, et aequalibus ad basin inclinentur angulis: opposita ejus latera, quae basi insistunt, aequalia, et ad basin aequaliter inclinata erunt, et diagonales aequales erunt.

Theorematis XXXII. (§. 68.) hoc:

Si quadrilateri duo latera opposita aequalibus ad basin inclinentur angulis, et duae diagonales aequalia terminent triangula basi insistentia: erunt ea latera aequalia, et diagonales aequales, et aequalibus angulis ad basin inclinatae.

Consequuntur haec indirecta argumentatione ex §. 220.; directe ex §. 240.

253.

Alterum Theorematis XXVIII. (§. 65.) conversum hoc erit:

Si rectae alicujus in uno extremo terminatae segmento, quod huic extremo adjacet, ut basi, insistat

triangulum, et ad idem extremum, et ad easdem prioris rectae partes ipsi insistat recta aequalis lateri trianguli opposito, et sub angulo aequali ei, quo hoc latus ad basin inclinatur; tum ex hujus insistentis termino ad rectam initio dictam ducatur recta terminans triangulum aequale dicto triangulo: ea incidet in alterum basis extremum, et reliquo trianguli lateri aequalis erit.

Fig. 117. Sit recta in A terminata AB, cujus segmento AC, ut basi, insistat triangulum ADC, et ad idem extremum A, et ad easdem rectae AB partes ipsi insistat recta AE aequalis lateri opposito CD, et sub angulo EAB aequali angulo ACD; tum ex hujus insistentis termino E ad rectam AB ducatur recta terminans triangulum aequale triangulo ADC: ea incidet in basis extremum alterum C, et aequalis erit lateri AD.

Si enim in aliud, quam C, ipsius AB punctum incideret, ut in F: terminaret triangulum AEF inaequale triangulo ADC (§. 208.). Sed terminat aequale (hyp.). Itaque in ipsum punctum C incidet; et erit EC aequalis AD per Elem. prop. 4.

§. 254.

Theorematis XXXIII. (§. 70.) hoc erit conversum:

Si alicui rectae in ipsius extremis et ad easdem partes insistant duae perpendiculares terminatae, et quae ipsarum terminos cum alternis prioris rectae extremis jungunt rectae, aequalia terminent triangula; erunt illae perpendiculares inter se aequales.

Theorematis XXXIV. (§. 71.) hoc:

Si quadrilateri duo latera basi sint perpendicularia, et duae diagonales aequalia terminent super communi basi triangula: erunt et illa duo latera aequalia, et haec diagonales aequales.

Theorematis XXXVI. (§. 73.) hoc:

Si quadrilateri duae diagonales aequaliter ad basin inclinentur, et aequalia terminent triangula super communi basi; laterum autem basi insistentium unum ipsi perpendiculare sit: alterum quoque ipsi perpendiculare, et priori aequale erit.

§. 255.

Theorematis XXXVII. (§. 75.) hoc erit conversum:

Si intra angulum a terminis segmentorum duorum aequalium, a cruribus inde a vertice abscissorum, ductae duae rectae aequalia terminent triangula: eae et ipsae aequalia ab alternis cruribus abscindent segmenta, et inter se aequales erunt, et ad crura tam in priorum, quam in posteriorum segmentorum terminis aequalibus angulis internis inclinabuntur.

Vel: Si ab extremis duarum rectarum aequalium in concursu angulum facientium, ad alternas illas rectas vel iqsas vel productas ductae duae rectae aequalia terminent triangula: eaedem abscindent aequalia segmenta concursui adjacentia, et ipsae inter se aequales erunt.

Vel: Si intra angulum ductae duae rectae aequalia terminent triangula, et uno extremorum suorum aequalia abscindant segmenta crurum, vertici anguli

adjacentia: etiam altero extremo aequalia segmenta abscindent, et ipsae ductae rectae inter se aequales erunt.

Theorematis XLI. (§. 78.) hoc:

Si ab extremis basis trianguli aequicruris ad opposita crura ductae duae rectae aequalia terminent triangula communem cum priori triangulo verticem habentia: eae inter se aequales erunt, et aequalia a cruribus abscindent segmenta vertici adjacentia.

Theorematis XLII. (§. 79.) hoc:

Si ab extremis basis trianguli aequicruris ad oppositorum crurum ultra basin continuationes ductae duae rectae aequalia terminent triangula communem cum priori triangulo verticem habentia: eae inter se aequales erunt, et aequalia a cruribus productis abscindent segmenta vertici adjacentia.

Consequuntur haec indirecta argumentatione ex §. 222. 223.; directe ex §. 240.

Quibus addi potest et hoc:

Si a terminis segmentorum duorum aequalium a cruribus trianguli aequicruris vel ipsis vel eorum ultra basin continuationibus abscissorum ductae ad opposita crura duae rectae aequalia terminent triangula, eundem cum triangulo aequicruri verticem habentia, et earum una in unum basis extremum incidat: altera in alterum basis extremum incidet.

§. 256.

In Cap. III. Theorematis I. Casui 1mo (§. 92.) haec respondebunt conversa:

1mo. Si rectae alicui terminatae duae rectae (sive ad easdem, sive ad diversas illius partes) una in uno illius extremo, altera in puncto, in quo illa bifariam

secta est, insistant, facientes angulum angulo aequalem, quem altera cum altero illius rectae segmento faciunt; et, quae e termino prioris insistentis ad punctum bisectionis, et e termino posterioris insistentis ad alterius termini segmentum ducantur rectae, aequalia terminent triangula duabus insistentibus adjacentia: erunt illae insistentes inter se aequales.

2do. Si rectae alicui terminatae duae rectae, (sive ad easdem, sive ad diversas illius partes) una in uno illius extremo, altera in puncto ejus intermedio insistant, aequales inter se et aequalibus angulis altera ad alterum segmentum inclinatae; et, quae a termino prioris insistentis ad punctum intermedium, et a termino posterioris ad alterius segmenti extremum ducuntur rectae, aequalia terminent triangula, insistentibus adjacentia: erit recta terminata in illo puncto intermedio bifariam secta.

Consequuntur indirecta argumentatione ex §. 225; directe ex §. 240.

§. 257.

Ejusdem Casui 2do. (§. 94.) haec respondebunt conversa:

1mo. Si rectae alicui terminatae in ipsius extremis (sive ad easdem, sive ad diversas partes) insistant duae rectae sub angulis aequalibus, et ab harum terminis ad punctum, in quo prior recta bifariam secta est, ductae rectae lineae aequalia terminent triangula insistentibus adjacentia: erunt illae insistentes inter se aequales.

2do. Si eidem rectae terminatae in ipsius extremis, ad easdem aut diversas partes, insistant duae

aequales rectae et sub angulis aequalibus, et ab earum terminis ad punctum in priori sumtum ductae duae rectae terminent triangula aequalia duobus insistentibus adjacentia: prior recta in illo puncto bifariam secta est.

Consequuntur indirecte ex §. 226.; directe ex §. 240.

§. 258.

Casui 3io (§. 96.) haec respondebunt:

1mo. Si a puncto, in quo recta aliqua bifariam divisa est, duae rectae sub angulis, quos altera cum altero segmento faciunt, aequalibus eductae sint (sive ad diversas. sive ad easdem partes,) et ab harum terminis ad extrema illius rectae intra dictos angulos ductae duae rectae aequalia terminent triangula: erunt illae duae eductae inter se aequales.

2do. Si a puncto in recta terminata sumto duae rectae (sive ad easdem, sive ad diversas prioris partes) eductae sint aequales, et sub angulis aequalibus, quos altera cum altero segmento faciunt; et ab harum terminis ad extrema prioris rectae intra dictos angulos ductae duae rectae aequalia terminent triangula: erit recta terminata in illo puncto bifariam secta.

Consequuntur haec apagogice ex §. 227.; ostensive ex §. 240.

259.

Propositioni §. 103. vel 104. Theoremata I, II, III. Cap. III. complectenti, haec respondebunt conversa:

1mo. Si ad expositam rectam aliquam e duobus punctis extra ipsam sumtis (sive ad easdem, sive ad diversas expositae partes) ductae sint duae rectae aequales, et angulum angulo aequalem facientes, quem cum exposita recta comprehendunt ad partes alterutras; et ex iisdem duobus punctis aliae duae ad expositam ductae rectae, ad partes angulorum dictorum, aequalia terminent triangula: eae cum prioribus ductis aequalia intercipient expositae rectae segmenta; et ipsae inter se aequales erunt, et ad expositam aequalibus inclinabuntur angulis internis, et cum prioribus ductis aequales facient angulos.

2do. Si in exposita recta duo segmenta sumta sint inter se aequalia punctis duobus in ea sumtis adjacentia, et ex iisdem duobus punctis eductae sint duae rectae sub aequalibus ad dicta segmenta angulis; quae autem segmentorum sumtorum extrema cum eductarum rectarum terminis jungunt rectae, aequalia terminent triangula: erunt eductae inter se aequales, et rectae dictae terminos jungentes aequales erunt, et aequales cum exposita, itemque cum eductis facient angulos.

Consequuntur haec apagogice ex §. 228.; ostensive ex §. 240.

§. 260.

Propositioni §. 108. hae respondebunt conversae:

1mo. Si e duobus punctis ad easdem aut diversas rectae alicujus terminatae partis sumtis, tam ad duo ejus extrema (ex altero nempe puncto ad alterum

extremum,) quam ad aliud punctum in ipsa sumtum binae rectae ductae sint, quarum priores duae aequales sint, et cum posterioribus duabus aequales faciant angulos; sint autem et duo triangula aequalia, quae binis ex utroque puncto ductis et segmentis primae rectae continentur: erunt et duae posteriores ductae aequales, et duo segmenta terminatae rectae aequalia, et tam priores, quam posteriores ductae aequalibus ad eam angulis inclinabuntur.

2do. Si e duobus punctis ad easdem aut diversas expositae rectae terminatae partes sumtis, tam ad duo ejus extrema, quam ad aliud punctum intermedium in ipsa sumtum, binae rectae ductae sint, quarum posteriores (quae ad punctum intermedium ductae) aequales sint, et cum prioribus faciant angulos aequales; sint autem et duo triangula aequalia, quae a binis ex utroque puncto ductis et a segmentis primae rectae continentur: erunt et duae priores aequales, et duo segmenta rectae terminatae aequalia, et tam priores quam posteriores duae aequalibus ad ipsam inclinabuntur angulis.

Ostenduntur hae apagogice ex §. 229.; directe ex §. 240.

§. 261.

Propositioni §. 114. vel §. 116. hae respondebunt conversae:

Si duae rectae ex uno puncto exeuntes et in eo facientes angulum, et duae aliae ex alio puncto exeuntes, una quidem uni priorum aequalis, facientes autem angulum priori angulo aequalem, extremis suis tangant eandem expositam rectam; sint autem et duo

triangula a duobus prioribus et a duobus posterioribus super expositae rectae segmentis contenta inter se aequalia: erit et altera priorum alteri posteriorum aequalis, et segmenta rectae expositae a prioribus et a posterioribus intercepta aequalia, et anguli ad haec segmenta, alter alteri, aequales.

Vel, si alicui expositae rectae in duobus ejus punctis insistant rectae aequales, et ab earum extremis aliae duae rectae ad expositam demissae sint, cum prioribus aequalem comprehendentes angulum; sint autem et duo triangula, quae a singulis insistentibus et demissis super expositae rectae segmentis continentur, inter se aequalia: erunt et demissae aequales, et dicta segmenta aequalia, et tam insistentes duae quam demissae duae ad expositam inclinabuntur angulis aequalibus.

Consequuntur haec ex §. 230. indirecte, directe ex §. 240.

§. 262.

Nec difficilius erit reliquorum Capitis III. Theorematum conversa invenire, quam contraria (§. 231.), quorum ope indirecte demonstrantur, aut directe per §. 240. omnia. Sed accedimus ad partem hujus Capitis secundam.

Pars *II.* hujus Capitis.

§. 263.

Altera Propositio convertens quartam Elementorum haec erit:

Si duo triangula duos angulos duobus angulis, alterum alteri, aequales habeant, et unum latus uni lateri aequale, quod quidem aequalibus angulis adjacet: habebunt et reliqua latera reliquis lateribus, alterum alteri, aequalia, ea quidem, quae subtendunt angulos aequales; et reliquum angulum reliquo angulo aequalem; et ipsa inter se triangula erunt aequalia.

Haec vero non alia est, quam Euclidis 26ae libri primi pars 1ma: nisi quod in illius enuntiatione Euclides brevitati consulens, cum praeterea in altera parte aliam hypothesin cum ea, quam modo proposuimus, conjungat, et communia utriusque consequentia una propositione complecti velit, non diserte verbis exprimit, quae latera reliqua quibus aequalia sint; deinde etiam ipsorum triangulorum aequalitatem omittit, quod eam ex hypothesibus 26ae concludere nusquam ipsi in sequentibus opus sit.

Demonstrationem ipsam Euclidis ad verbum hic non apponimus, sed eam, re quidem ipsa cum illa convenientem, quae nititur propositione §. 208. contraria quartae Elementorum.

Fig. 12. Sint igitur duo triangula ABC, DEF, habentia angulos ABC, BCA angulis DEF, EFD, alterum alteri, aequales, angulum scilicet ABC angulo DEF, et angulum BCA angulo EFD; et unum latus uni lateri aequale, quod aequalibus angulis adjacet, latus BC lateri EF: dico ea

triangula habere et reliqua latera reliquis lateribus, alterum alteri, aequalia, ea, quae subtendunt angulos aequales, latus quidem AB lateri DE, latus autem AC lateri DF; et reliquum angulum BAC reliquo angulo EDF aequalem; et ipsa triangula ABC, DEF inter se aequalia esse.

Si enim inaequalia sint latera AB, DE; erit unum eorum majus, puta AB: et quia sic triangula ABC, DEF latus quidem BC lateri EF aequale, latus autem AB latere DE majus, et angulum ABC angulo DEF aequalem habent, qui illis lateribus comprehenditur: habebunt per §. 208. etiam angulum majorem eum, qui majori lateri subtenditur; hoc est, angulum ACB majorem angulo DFE. Non autem est angulus ACB major DFE: aequalis enim per hypothesin. Non ergo latera AB, DE inaequalia sunt: ergo aequalia. Et hinc, cum sint duae AB, BC duabus DE, EF aequales, et angulus ABC angulo DEF: per prop. 4. Elem. erit et AC aequalis DF, et triangulum ABC aequale triangulo DEF, et angulus BAC aequalis angulo EDF: quod erat demonstrandum.

Sequitur, ut huic conversae propositionis 4tae Elementorum subjungamus respondentia conversa altera Theorematum Cap. 2di et 3tii.

§. 264.

Theorematis I. (§. 32.) Conversum respondens hoc erit:

Si a termino rectae angulum aliquem rectilineum bifariam secantis ductae utrinque sub aequalibus ad ipsam angulis duae rectae occurrant rectis illum an-

gulum comprehendentibus: aequalia ab ipsis abscindent segmenta, et ipsae inter se aequales erunt, et cum rectis illum angulum comprehendentibus aequales facient internos angulos, et triangula terminabunt aequalia.

Fig. 17. Angulum rectilineum ad A bifariam secet recta A D, et ex ejus termino D, ad utrasque ejus partes et sub aequalibus ad ipsam angulis A D B, A D C ductae rectae D B, D C occurrant in B, C rectis angulum ad A comprehendentibus: eae aequalia ab his abscindent segmenta A B, A C; et ipsae D B, D C inter se aequales erunt; et cum rectis angulum ad A comprehendentibus aequales facient angulos internos A B D, A C D; et triangula terminabunt aequalia A B D, A C D.

Consequitur directe ex propositione §. 263; indirecte, si placet, ostendetur per Theorematis I. contrarium §. 209. traditum.

Huic conjunctum est Theorematis II. (§. 34.) conversum hoc:

Si in quadrilatero duo anguli oppositi bifariam singuli secentur diagonali: bina latera utrumque illorum angulorum comprehendentia aequalia erunt, et anguli illi diagonali oppositi aequales erunt, et ipsum quadrilaterum eadem diagonali bifariam divisum erit.

§. 265.

Quod autem in hypothesi §. 264. posuimus, duas rectas illic e termino rectae angulum bifariam secantis sub aequalibus ad ipsam angulis ductas, occurrere duabus rectis angulum illum comprehendentibus: ea

hypothesis superflui aliquid habet. Nam si una ductarum uni comprehendentium occurrat, necessario et altera alteri occurret, ut ostendetur. Itaque sublato illo superfluo haec erit propositio:

Si a termino rectae angulum aliquem rectilineum bifariam secantis educantur duae rectae ad utrasque illius partes et sub aequalibus ad ipsam angulis, et earum una occurrat uni rectarum illum angulum comprehendentium: etiam altera alteri occurret, et duae eductae a duabus angulum comprehendentibus aequalia segmenta abscindent etc.

Angulum E A F bifariam secet recta A D, e cujus termino D ad utrasque ipsius partes eductae sint rectae D B, D G sub aequalibus ad ipsam angulis A D B, A D G; et earum una D B occurrat uni A C rectarum angulum E A F comprehendentium in B: dico, etiam alteram D G alteri A F occurrere et ab ea segmentum abscindere aequale segmento A B. *Fig. 118.*

Abscindatur enim ab A F recta A C aequalis A B, et jungatur C D: ea in ipsam rectae D G directionem cadet. Si enim non ita cadat, sed ab ea deflectat: cum sint duae B A, A D duabus C A, A D aequales, et angulus B A D angulo C A D aequalis: per prop. 4. Elem. erit et angulus A D C aequalis angulo A D B: sed per hyp. est angulus A D G angulo A D B aequalis: ergo (per Axioma 1.) angulus A D C angulo A D G aequalis erit, pars toti: quod fieri nequit. Non igitur potest recta C D aliter quam in rectae D G directionem cadere: ergo D G, si opus est, producta incidet in ipsum punctum C, et in eo occurret rectae A F, et ab ea abscindet segmentum A C. Est autem A C aequalis A B, per constructionem. Ergo recta D G

producta, si opus est, rectae A G occurrit, et ab ea segmentum abscindit segmento A B aequale: quod erat ostendendum.

Idem et sic enunciari potest: si in utroque rectae alicujus extremo ad diversas ejus partes insistant binae rectae sub aequalibus angulis, quarum duae, quae ad easdem partes sunt, concurrant: etiam duae, quae ad alteras partes sunt, concurrent, et binae ad idem extremum et diversas partes aequales erunt.

§. 266.

His affine quidem, differens tamen accessione προςδιορισμȣ cujusdam ad hypothesin et ad consequens, hoc:

Si angulum duabus rectis aequalibus comprehensum bifariam secet recta, et ex hujus puncto quocumque sub aequalibus ad ipsam angulis ad utrasque partes eductae sint duae rectae, quarum una in unius rectarum aequalium terminum incidat: altera quoque in alterius terminum incidet.

Cujus demonstratio in ipsa illa §. 265. contenta esse facile deprehendetur.

Item, ut Theoremati V. et VI. (§. 38. 39.) respondeat:

Si angulum ad verticem trianguli aequicruris bifariam secet recta, cujus e puncto quocunque sive extra, sive intra triangulum sumto ductae utrinque duae rectae, aequales cum ipsa faciant angulos, et una earum vergat ad unum basis extremum: etiam altera verget ad alterum.

Item, ut in Chrestomathia geom. pag. 336. Nr. 30.

§. 267.

Alia conversa haec erit:

Si angulum comprehendant duae rectae aequales, et ad ipsas in earum extremis et intra illum angulum ducantur rectae sub angulis aequalibus, quarum una cum recta priorem angulum bifariam secante concurrat: etiam altera in eodem puncto cum ipsa concurret, et ad concursum usque sumta priori aequalis erit.

Angulum ad A comprehendant rectae AB, AC aequales, et ad ipsas in earum extremis B, C, et intra angulum BAC ducantur rectae BD, CE sub angulis aequalibus ABD, ACE, quarum una BD cum recta AD angulum BAC bifariam secante concurrat in puncto D: etiam altera CE in eodem puncto D cum AD concurret; et ad hunc concursum usque sumta ipsi BD aequalis erit. *Fig. 119.*

Jungatur enim CD; ea in directionem CE cadet: si enim aliter cadat; quia duae BA, AD duabus CA, AD aequales sunt, et angulus BAD angulo CAD aequalis est; per prop. 4. Elem. erit angulus ACD angulo ABD aequalis. Sed et angulus ACE angulo ABD aequalis est. Ergo angulus ACD angulo ACE aequalis est, pars toti; quod fieri nequit. Non igitur CD aliter quam in directionem CE cadit: ergo CE in ipsum punctum D incidit. Et usque ad concursum in D sumta aequalis est BD per prop. 4. Elem., quod erat ostendendum.

Enuntiabitur et sic: si ad eandem rectam in ejus extremo et ad diversas ipsius partes duae rectae aequales et aequalibus angulis inclinentur, et ad has in ipsarum terminis et ad easdem ipsarum partes, ad

quas est prior recta, ducantur rectae sub aequalibus augulis, quarum una cum priori recta concurrat: etiam altera in eodem puncto concurret, et priori aequalis erit.

Et sic: si ad duo crura anguli sumta aequalia in eorum extremis ducantur duae rectae sub angulis aequalibus, ad easdem utriusque cruris partes, ad quas est crus alterum; et earum una concurrat cum recta angulum primo dictum bifariam secante: altera quoque cum eadem in eodem puncto concurret.

§. 268.

Theorematis III. (§. 36.) conversum hoc erit:

Si in triangulo recta eadem et angulum ad verticem bifariam secet, et basi perpendicularis sit: basin etiam bifariam secabit, et triangulum illud erit aequicrus, et habebit angulos ad basim aequales.

Consequitur directe ex §. 263.; indirecte ostendi potest ex §. 211.

§. 269.

Huic cognatum sequens conversum Theorematis VIII. (§. 43.)

Si recta aliqua uno suo extremo alii rectae perpendicularis insistat, et ex altero ipsius extremo ad utrasque ipsius partes ducantur duae rectae, facientes aequales cum ipsa angulos, quarum una posteriori rectae occurrat: etiam altera ipsi occurret, et aequale, atque illa, segmentum posterioris rectae abscindet priori rectae adjacens; et priori ductae aequalis erit, utra-

utraque ad occursum usque sumta; et aequali, ac prior ducta, angulo interno ad posteriorem rectam inclinabitur.

Recta AB uno suo extremo A alii rectae CD perpendicularis insistat, et ex altero ipsius extremo B ad utrasque ipsius partes ducantur duae rectae BE, BF facientes cum ipsa angulos aequales ABE, ABF, quarum una BE rectae CD occurrat in E; etiam altera BF rectae CD occurret, et abscindet segmentum ejus adjacens puncto A aequale AE, et ad occursum usque sumta aequalis erit BE, et ad rectam CD inclinabitur angulo interno aequali BEA. *Fig. 120.*

Sumatur enim AG aequalis AE; et jungatur BG: ea in directionem BF cadet. Si enim aliter cadat: quoniam duae BA, AE duabus BA, AG aequales sunt, et angulus BAE angulo BAG (hyp. et Def. 10. I. El.), erit et angulus ABE angulo ABG aequalis, per prop. 4. El. Sed per hyp. est angulus ABE angulo ABF aequalis. Ergo anguli ABF, ABG aequales, pars et totum; quod fieri nequit. Non ergo BG aliter quam in directionem BF cadet; ergo BF producta rectae CD in puncto G occurret. Et per El. prop. 4. est BG, hoc est, ducta BF ad occursum usque sumta, aequalis BE, et ad CD inclinatur angulo BGA aequali BEA; abscindit autem etiam segmentum AG segmento AE aequale (per constr.) quod e. d.

Enuntiabitur et sic: Si ad aliquam rectam e puncto extra ipsam sumto et perpendicularis cadat, et alia quaecunque incidat; et ex eodem puncto ad alteras perpendicularis partes ducatur alia cum perpendiculari faciens angulum ei, quem dicta incidens cum ipsa

facit: ea et ipsa in rectam primo dictam incidet, et aequale ejus segmentum, ac prior incidens, abscindet, et priori incidenti aequalis erit.

§. 270.

Huc sequens conversum Theorematis VIII. §. 43.:

Si rectae lineae terminatae in extremis ejus et ad easdem partes insistentes duae rectae sub angulis aequalibus, occurrant perpendiculari priorem rectam bifariam secanti: in eodem puncto occurrent et sub angulis aequalibus, et ad illum usque occursum sumtae inter se aequales erunt.

Fig. 121. Rectae terminatae AB in ipsius extremis A, B, et ad easdem partes insistant duae rectae AD, BE sub angulis BAD, ABE aequalibus, et occurrant rectae ipsi AB in puncto C, in quo ea bifariam secta est, perpendiculari CF: dico primum, eas huic in eodem puncto occurrere.

Occurrant enim, si fieri potest, in diversis punctis; una quidem in D, altera vero in F; et quia duarum AC, CD et alterarum BC, CF una AC uni BC aequalis est, altera CD alteri CF inaequalis; angulus vero ACD angulo BCF aequalis: per §. 208. erit et angulus CAD angulo CBF inaequalis. Sed per hyp. angulus CAD angulo CBE aequalis est: quod repugnat. Non ergo fieri potest, ut rectae AD, BE rectae CF in diversis punctis occurrant; ergo in eodem puncto occurrent.

Si igitur prior occurrat in D, altera quoque BE in D occurret. Et per prop. 4. Elem. erit AD aequalis BD, et angulus ADC aequalis angulo BDC.

§. 271.

Haec demonstratio ut justa est ad enuntiationem superiorem, ubi in hypothesi ponebatur, duas insistentes perpendiculari occurrere; ita non sufficit, si in hypothesi ponatur, unam insistentium perpendiculari occurrere, et asseratur, alteram ipsi in eodem puncto occursuram esse. Tunc enim non modo removendus erit casus, quo perpendiculari in alio puncto occurrat; sed et is casus, quo ipsi prorsus non occurrat. Quod enuntiari et demonstrari potest, ut statim sequitur. Observandum est autem, similem ei, quam in hujus propositionis enuntiatione ac demonstratione indicavimus, differentiam in aliis pluribus hujus II*dae* partis hujusce capitis locum habere; quemadmodum id supra §. 265. monuimus; idemque §. 267. locum habet; et in pluribus sequentibus; quod hic semel monendum putavimus.

Sic ergo enuntiabitur: Si rectae alicui in extremis ejus et ad easdem partes insistant duae rectae sub angulis aequalibus, quarum una perpendiculari illam rectam bifariam secanti occurrat: etiam altera eidem perpendiculari in eodem puncto occurret, et cum ipsa aequalem, ac prior ducta, angulum internum faciet, et ad occursum usque sumta priori ductae aequalis erit.

Rectae AB, quam bifariam secet perpendicularis CF, in extremis A et B; et ad easdem partes, insistant rectae AD, BE sub angulis aequalibus BAD, ABE; et earum una AD rectae CF occurrat in D: etiam altera BE ipsi in eodem puncto D occurret, et cum CF angulum internum compre- *Fig. 122.*

hendet aequalem angulo ADC, et ad occursum in D usque sumta aequalis erit AD.

Jungatur enim BD: ea in directionem BE cadet. Si enim aliter cadat: quoniam duae AC, CD duabus BC, CD aequales sunt, et angulus ACD angulo BCD aequalis est; erit per Elem. prop. 4. etiam angulus CAD angulo CBD aequalis. Sed et angulo CBE aequalis est per hyp. Ergo anguli CBD, CBE aequales; pars et totum; quod fieri nequit. Non ergo BD aliter, quam in ipsam BE cadet: ergo producta BE rectae CF in D occurrit; et per Elem. pr. 4. BD est aequalis AD, et angulus BDC angulo ADC aequalis.

Ejusdem enuntiatio respondens Theoremati X. (§. 45.)

Si in triangulo unum latus et basis comprehendant angulum rectum; et juxta hunc basi aequalis recta in directum adjiciatur, et ab hujus extremo ad easdem partes, ad quas est triangulum, ducatur recta sub angulo aequali reliquo angulo basi adjacenti: ea incidet in ipsum verticem anguli basi oppositi, et reliquo trianguli lateri aequalis erit.

§. 272.

Theorémati XII. (§. 47.) hoc respondebit conversum:

Si ad verticem anguli rectilinei et extra ipsum angulum ducta recta aequales utrinque faciat angulos cum rectis illum angulum comprehendentibus, et ex ejus puncto aliquo duae rectae utrinque sub aequalibus ad ipsam angulis ductae, occurrant rectis dictis angulum comprehendentibus; aequalia ab iis segmenta ab-

scindent, et ipsae inter se aequales erunt, et ad illa segmenta aequalibus angulis inclinatae.

Consequitur directe ex §. 263., indirecte ex §. 215. et El. prop. 4. Sed hic rursus hypothesi aliqua pars demi potest, sic: Si ad verticem — comprehendentibus, et ex ejus puncto aliquo ductae sint duae rectae utrinque sub aequalibus ad ipsam angulis, quarum una occurrat uni rectarum illum angulum comprehendentium: etiam altera alteri occurret, et priori aequalis erit.

Cujus erit demonstratio similis iis, quae §. 267. 271.

Huic cognatum Theorematis XIII. (§. 48.) conversum hoc:

Si extra triangulum aequicrus a vertice ipsius ducatur recta faciens cum utroque crure angulos aequales; et e puncto ipsius quocumque ductae sint ad utrasque prioris partes duae rectae sub aequalibus cum ipsa angulis, quarum una vergat ad unum basis extremum: etiam altera verget ad alterum basis extremum.

Aliud Theorematis XII. (§. 47.) conversum:

Si ad verticem anguli aequalibus rectis comprehensi et extra ipsum angulum posita sit recta faciens cum illis aequales angulos ad utrasque partes, et ex terminis priorum ducantur sub aequalibus ad ipsas angulis duae rectae, quarum una occurrat rectae exteriori: altera eidem occurret in eodem puncto, et priori aequalis erit.

§. 273.

Theorematis XVIII — XXIII. (§. 54. 55.) haec respondebunt conversa:

Si rectae alicui in extremis ejus et ad diversas partes insistant duae rectae, facientes cum ipsa angulos alternos utrosque aequales, et duae, quae ad easdem partes sunt, concurrant: etiam duae, quae ad alteras partes sunt, concurrent, et binae, quae in alternis extremis et ad diversas partes insistunt, aequales erunt.

Si in quadrilatero diagonalis cum binis oppositis lateribus aequales faciat angulos, latera bina opposita aequalia erunt.

Si rectae lineae uno in extremo terminatae segmento, huic extremo adjacenti, ut basi, insistat triangulum; et ad idem extremum et ad alteras illius rectae partes ducta recta sit aequalis lateri trianguli opposito, et aequalem, ac illud, cum basi faciens angulum; tum ad hanc ductam in ipsius termino et ad easdem ipsius partes, ad quas sunt reliquae lineae, ducatur alia recta sub angulo aequali angulo trianguli basi opposito: ea recta cum initio dicta in eo puncto, quod est alterum basis extremum, concurret, et aequalis erit reliquo trianguli lateri.

Vel: Si ad rectam aliquam in ipsius extremis et ad diversas ejus partes aequales rectae aequalibus inclinatae sint angulis alternis, et angulo, quem una earum cum recta ipsius terminum et alternum rectae prioris extremum jungente facit, aequalis constituatur angulus ad alteram in ipsius termino et ad eas partes, ad quas est recta initio dicta: recta, quae hunc an-

gulum cum illa facit, in ipsum alterum rectae initio dictae extremum incidet.

Si in duas rectas lineas incidens alia recta angulos alternos fecerit aequales, et ex utroque punctorum, in quae incidit, ad diversas incidentis partes, quam ad quas jacet angulus ex dictis alternis eidem adjacens, ducantur rectae lineae sub aequalibus ad incidentem angulis, quarum una oppositae e prioribus duabus rectis occurrat: etiam altera oppositae occurret; et illae aequales erunt, et aequalia a prioribus rectis abscindent segmenta punctis incidentiae adjacentia.

§. 274.

Theorematis XXVIII. — XXXII (§. 65—69.) haec respondebunt conversa:

Si rectae alicui in duobus ejus extremis et ad easdem partes insistentes duae rectae sub aequalibus angulis, cum duabus aliis rectis, in alternis extremis, item ad easdem partes et sub angulis aequalibus insistentibus, concurrant: erunt tam priorum quam posteriorum rectarum segmenta concursibus terminata inter se aequalia.

Si in quadrilatero duo latera opposita ad basin aequalibus angulis inclinentur, et ad eandem basin duae quoque diagonales aequalibus inclinentur angulis: erunt tam duo latera dicta, quam duae diagonales, inter se aequalia.

Si ad rectam aliquam terminatam in duobus ejus extremis et ad easdem partes duae rectae inclinatae sint aequalibus angulis, et rursus aliae duae item

aequalibus angulis, quarum una occurrat uni ex prioribus, quae ipsi opponitur: etiam altera alteri occurret, et ab ipsa aequale segmentum, ac prior a priori, abscindet.

Si rectae in uno extremo terminatae segmento, quod huic extremo adjacet, ut basi, insistat triangulum, et ad idem extremum et ad easdem illius rectae partes ipsi insistat recta aequalis opposito trianguli lateri, et sub angulo aequali ei, quo dictum latus ad basin inclinatur; tum ad hanc insistentem in ipsius termino et ad easdem ipsius partes, ad quas reliquae lineae sunt, ducatur alia recta sub angulo aequali angulo trianguli ei, qui basi opponitur: ea cum initio dicta recta in eo puncto, quod est alterum basis extremum, concurret, et reliquo trianguli lateri aequalis erit.

§. 275.

Priusquam autem ad sequentium Cap. II. Theorematum Conversa progrediamur; aliud adhuc conversorum genus commemoramus; qualia sunt haec:

Ad Quaest. I. Cap. II. (cf. §. 264 — 266.:) Si e termino rectae angulum aliquem rectilineum bifariam secantis demittatur recta utcumque ad unam rectarum illum comprehendentium; et ex eodem termino ducatur recta illi demissae aequalis et aequalem, atque illa, faciens angulum cum recta priorem angulum bifariam secante: ea extremo suo alteram rectarum angulum illum comprehendentium tanget.

Fig. 123. Angulum BAC bifariam secet recta AD, et ex hujus termino D ad rectam AB demittatur utcunque recta DE; ex eodem vero

puncto D alia recta ducatur aequalis DE, et cum AD faciens angulum angulo ADE aequalem: dico, eam extremo suo rectam AC tangere.

Si enim non tangat, sed extremum ipsius extra AC cadat, ut in F: juncta AF recta; quoniam DF aequalis est DE (hyp.), ergo duae ED, DA, duabus FD, DA aequales, et angulus EDA aequalis angulo FDA (hyp.): erit et angulus DAE angulo DAF aequalis per Elem. I. prop. 4. Sed est angulus DAE aequalis angulo DAC (hyp.) Ergo anguli DAF, DAC aequales, pars et totum: quod fieri nequit. Non ergo fieri potest, ut rectae ad AD in D sub angulo aequali angulo ADE ductae et aequalis ipsi DE extremum aliter, quam in AC cadat: ergo in AC cadet: quod erat ostendendum. Et similiter demonstrari possunt sequentia:

Ad Quaest. II. Cap. II. (cf. §. 268. 269.)
Si ad aliquam rectam e puncto extra ipsam sumto et perpendicularis cadat et alia quaecumque recta incidat; et ex eodem puncto ad alteras perpendicularis partes ducatur alia recta dictae incidenti aequalis, et aequalem, atque haec, cum perpendiculari faciens angulum: ea extremo suo priorem rectam tanget.

Ad Quaest. III. Cap. II. (cf. §. 272.)

Si e puncto aliquo rectae exterioris ad anguli alicujus verticem positae, et aequales facientis angulos cum rectis illum comprehendentibus, recta quaecumque in unam harum rectarum incidat, et alia recta ex eodem puncto ducatur incidenti dictae aequalis, et aequalem, atque illa, angulum cum dicta exteriori comprehendens: ea alteram rectarum angulum priorem comprehendentium extremo suo tanget.

Ad Quaest. IV. Cap. II. (cf. §. 273.)

Si rectae terminatae in duobus ejus extremis et ad diversas partes insistant duae rectae sub angulis aequalibus, et ad unam earum ex alterno extremo demissa sit recta quaecunque; ex reliquo autem extremo ducatur alia recta illi demissae aequalis, et aequalem, atque illa, faciens angulum cum recta initio dicta: ea extremo suo tanget reliquam insistentem.

Ad Quaest. V. Cap. II. (cf. §. 274.)

Si rectae terminatae in duobus ejus extremis et ad easdem partes insistant duae rectae ..... Reliqua manent ut in prox. praec.

§. 276.

Praeterea etiam notari potest, propositiones §. 267. 271. traditas, et quae ipsis analogae sunt nonnullae conversarum sequentium, alio etiam modo, item indirecto, sed paullo longiori, quam illic, demonstrari posse.

Fig. 124. Ad §. 267. ostendendum erat: si angulum ad A comprehendant rectae AB, AC aequales, et ad rectam angulum illum bifariam secantem AF ex B ducta sit recta BD quaecumque, ex C vero ducta sit recta CE faciens angulum ACE angulo ABD aequalem: vergere eam rectam CE ad punctum D.

Hoc igitur alio modo, quam illic, ostendetur sic:

Capiatur rectae CE segmentum aequale BD: hujus segmentum in punctum D incidet. Si enim non; cadet aut extra AF aut in aliud ipsius AF punctum quam D. Non autem poterit cadere extra AF, ut in

G: alioqui juncta AG; cum sit CG aequalis BD (hyp.) et AC aequalis AB, ergo duae AC, CG duabus AB, BD aequales, et angulus ACG angulo ABD; erit per Elem. prop. 4. angulus CAG angulo BAD aequalis. Sed angulus CAD angulo BAD aequalis est (hyp.) Ergo anguli CAG, CAD aequales, pars et totum; quod fieri nequit. Non igitur terminus segmenti rectae CE capti ipsi BD aequalis cadet extra A F.

Rursus autem nec cadere potest in punctum ipsius AF a D diversum, ut F: alioqui, cum duae rectae BA, AD et duae CA, AF comprehendant angulum aequalem, sit autem BA quidem aequalis CA; AD vero major aut minor AF: erit (per §. 208.) et angulus ABD major aut minor angulo ACF. Non est autem: aequalis enim per hyp. Ergo terminus segmenti rectae CE capti ipsi BD aequalis non in aliud ipsius AF punctum praeter D cadere potest. Et ostensum est, quod nec extra AF. Ergo in ipsum punctum D cadet. Unde patet, rectam CE ad punctum D vergere: quod erat ostendendum.

Et similiter ostendi poterit propositio §. 271., et aliae his analogae in iis, quae sequebantur.

§. 277.

Sed pergimus in iis, ad quae substiteramus §. 274.; atque ita venimus ad T h e o r e m a t a Q u a e s t i o n i VI. C a p. II. s u b j u n c t a, XXXVII*mum* et s e q u e n t i a. His respondebit conversum hoc:

Si ab extremis duarum rectarum aequalium in concursu angulum facientium, intra hunc angulum

ducantur sub aequalibus ad ipsas angulis duae rectae, quarum una occurrat alternae vel ipsi vel productae: etiam altera earum rectae alternae occurret; et illae inter se aequales erunt, et abscindent aequalia segmenta concursui adjacentia.

Item: Si a trianguli habentis duo latera inaequalia, latere uno ipso vel producto abscindatur segmentum vertici adjacens reliquo lateri aequale, et ad hoc segmentum in ejus extremo recta ducatur intrinsecus faciens cum ipso angulum aequalem angulo trianguli ei, quem prius latus subtendit: ea posteriori lateri, producto vel ipsi, occurret, et erit basi aequalis, et triangulum terminabit priori triangulo aequale, et a latere posteriori (producto vel ipso) abscindet segmentum aequale lateri priori, et cum segmento faciet angulum aequalem angulo prioris trianguli ei, quem posterius latus subtendit. Haec propositio duos habet casus, qui seorsim enuntiari possunt; et quidem sic.

Casus I. Si a trianguli habentis duo latera inaequalia latere majori abscissum sit inde a vertice segmentum minori lateri aequale, et ab hujus segmenti extremo recta ducatur intrinsecus faciens cum ipso angulum aequalem ei, quem majus trianguli latus subtendit; ea minori lateri producto occurret, et erit basi aequalis, et triangulum terminabit priori triangulo aequale, et a minori latere producto segmentum abscindet vertici adjacens aequale majori lateri, et cum ipso faciet angulum aequalem ei, quem minus latus prioris trianguli subtendit.

Casus II. Si a trianguli latera duo inaequalia habentis latere minori producto abscissum sit segmentum vertici adjacens aequale majori lateri, et ab hujus

segmenti extremo ducatur intrinsecus recta sub angulo, quem cum illo facit, aequali ei, quem subtendit minus latus trianguli: ea lateri majori occurret, et basi aequalis erit, et triangulum terminabit priori triangulo aequale, et a majori latere segmentum abscindet vertici adjacens aequale minori lateri, et cum ipso angulum faciet aequalem ei, quem majus latus prioris trianguli subtendit.

§. 278.

Horum aliud Conversum hoc erit:

Si trianguli, cujus duo latera sunt inaequalia, ab uno latere, ipso vel producto, abscindatur segmentum reliquo lateri aequale; et ad ipsum in ejus extremo sub angulo aequali ei, quem prius latus subtendit, constituatur ad easdem partes, ad quas est triangulum, recta aequalis basi: hujus extremum tanget posterius latus productum aut ipsum.

Habet autem duos casus, qui separatim sic enuntiabuntur:

Casus I. Si a trianguli, habentis duo latera inaequalia, majori latere abscindatur segmentum vertici adjacens aequale minori lateri; et ad ipsum in ejus extremo constituatur ad partes, ad quas est triangulum, recta basi aequalis sub angulo aequali ei, quem subtendit latus majus: rectae illius extremum tanget latus minus productum: sive, ducta ex rectae illius termino ad lateris minoris extremum recta ipsi lateri minori in directum jacebit.

Sit triangulum ABC habens latus AB majus latere AC, et ab AB abscindatur segmentum *Fig. 125.*

AD aequale AC, et ad ipsum in D constituatur ad partes, ad quas est triangulum ABC, recta basi BC aequalis sub angulo aequali angulo ACB: ejus extremum tanget latus AC productum.

Producatur AC ad F: et si rectae in D ita, ut dictum est, constitutae extremum non tangat rectam AF, sed extra ipsam cadat, ut in E: jungatur AE; et quia DE aequalis est BC, AD aequalis AC, ergo duae AD, DE duabus AC, CB aequales, et angulus ADE angulo ACB: per El. prop. 4. erit et angulus DAE angulo CAB aequalis, pars toti; quod fieri nequit. Non ergo extremum rectae ad D constitutae non tanget rectam AF; tanget igitur; quod erat ostendendum.

Idem aliter sic potest ostendi. Producta AC ad F, abscindatur AF aequalis AB, et jungatur DF: ea in directionem ipsius rectae ad D constitutae DE cadet. Si enim aliter cadat: cum sit BA ipsi AF, et AC ipsi AD aequalis, ergo duae BA, AC duabus FA, AD aequales, et angulus BAF communis; per prop. 4. El. erit et BC aequalis DF, et angulus ACB angulo ADF aequalis. Sed per hyp. angulus ACB angulo ADE aequalis est. Ergo duo anguli ADF, ADE aequales sunt, totum et pars: quod fieri nequit. Non ergo DF aliter, quam in directionem DE cadet: ergo recta DE ad ipsum punctum F verget. Sed ipsum punctum E cum puncto F coincidet; quia, si non, cum sit DE aequalis BC (hyp.) et DF aequalis BC (per ostensa), foret DE aequalis DF, pars toti, quod fieri nequit. Ergo punctum E cum puncto F coincidit, itaque rectam AF tangit; quod erat demonstrandum. Et similiter demonstrabitur

Casus II. Si a trianguli habentis duo latera inaequalia minori latere producto abscindatur segmentum vertici adjacens aequale majori lateri, et ad ipsum in ejus termino constituatur ad partes, ad quas est triangulum, recta basi aequalis sub angulo aequali ei, quem latus minus subtendit: rectae illius extremum tanget latus majus.

Sub his continentur haec, ut species sub genere:

1mo. Si in triangulo aequicruri basis major sit uno crurum aequalium, et ab ea abscindatur segmentum cruri aequale adjacens uni basis extremo; et ad hoc segmentum in ipsius termino constituatur intrinsecus recta aequalis uni crurum, faciens cum illo segmento angulum aequalem angulo ad verticem: rectae ejus extremum tanget productum crus dicto basis extremo adjacens.

2do. Si in triangulo aequicruri unum crurum aequalium majus sit basi, et basi in utrovis extremo recta in directum adjiciatur sic, ut basis simul cum adjecta sit aequalis cruri; et ad adjectam in ipsius termino constituatur recta intrinsecus sub angulo ei, qui est ad verticem trianguli aequicruris, aequali, ipsa cruri aequalis: hujus rectae extremum tanget crus adjacens reliquo basis extremo.

§. 279.

Haec hactenus ad praecipua Theorematum Cap. II. §. 32 — 79.: nunc et analoge §. 82 — 87. quaedam ipsius Elem. prop. 4. conversa praeter id, quod §. 263., subjungimus.

1mo. Si recta aliqua aequalis sit basi alicujus trianguli, et ipsi in ejus extremis et ad easdem partes insistant rectae sub angulis, qui angulis ad basim illius trianguli, altera alteri, aequales sint: eae productae concurrent.

Vel: Si cum aliqua recta terminata duae rectae faciant angulos in ejus extremis, et ad easdem ipsius partes ductae; et eae productae, si opus est, inter se concurrant: duae aliae rectae, quae cum recta priori aequali faciunt angulos prioribus aequales, alterum alteri, in ipsius extremis et ad easdem partes ductae, pariter ad eas partes, quoad opus est, productae concurrent.

Fig. 126. Sit enim recta DE aequalis basi BC trianguli ABC, et ad eam in extremis D, E ad easdem partes ductae rectae DF, EG faciant angulos FDE, DEG angulis ABC, BCA, alterum alteri, aequales: et ostendendum sit, rectas DF, EG, quoad opus est, productas concurrere.

Rectae EG, si opus est, productae, capiatur segmentum EH aequale CA: dico in puncto H rectas EG, DF concurrere. Si enim non in eo concurrant; juncta recta HD cadet in aliam directionem quam DF. Quoniam autem duae DE, EH duabus BC, CA aequales sunt, et angulus DEH angulo BCA; per prop. 4. Elem. est etiam angulus EDH angulo CBA aequalis. Sed et angulus EDF angulo CBA aequalis est (hyp.) Ergo angulus EDH angulo EDF aequalis, pars toti: quod fieri nequit. Non ergo rectae EG, DF non concurrent in puncto H: ergo concurrent.

2do. Si duae rectae duobus alicujus trianguli lateribus et aequales sint, altera alteri, et aequalem, atque

atque illa, angulum comprehendant; et ad unam earum in ipsius extremo et ad easdem partes, ad quas jacet altera, ducta sit recta sub angulo aequali ei, quem aequale ipsi trianguli latus cum basi comprehendit: ea cum extremo alterius duarum illarum rectarum concurret.

Hujus demonstrationem facile animadvertes in proxime praecedenti jam contentam esse.

Vel Si recta aliqua aequalis sit basi trianguli, et ipsi in extremis ejus et ad easdem partes insistant duae rectae sub angulis aequalibus iis, qui basi trianguli adjacent, altero alteri; ac praeterea una insistentium aequalis sumta sit lateri trianguli ei, quod aequali, atque ipsa, angulo adjacet: hujus insistentis extremum erit in ipsa altera insistente.

Vel Si duae rectae angulum comprehendant aequalem angulo trianguli, et earum una aequalis sit lateri uni eorum, quae illum trianguli angulum comprehendunt; et ad ipsam in ipsius termino, et ad easdem, ad quas est prior angulus, partes ducatur alia recta, faciens cum illa angulum aequalem angulo a dicto latere et basi comprehenso, et aequalis basi trianguli: ejus extremum alteram priorum rectarum tanget.

§. 280.

Nunc ad Theorematum Capitis III. Conversa.

Sed quid opus erit post exempla §. 256—261. contenta his diu immorari? Afferemus tamen aliqua.

Theorematis I. (Cap. III.) Casui 2do haec respondebunt:

1mo Si rectae alicui terminatae in ipsius extremis (sive ad easdem; sive ad diversas partes) insistant duae rectae sub angulis aequalibus, et ab harum terminis ad punctum, in quo prior recta bifariam secta est, ductae rectae lineae, aequales cum priori recta comprehendant angulos: erunt insistentes aequales, et postmodum ductae aequales.

2do Si eidem rectae terminatae in ipsius extremis, ad easdem aut diversas partes, insistant duae rectae aequales et sub angulis aequalibus, et ab earum terminis ad punctum in priori sumtum ductae duae rectae comprehendant aequales cum insistentibus angulos: prior recta in illo puncto bifariam secabitur.

Seu, si eidem rectae — — — — aequalibus (hactenus ut supra;) et ad ipsas in earum terminis ductae rectae sub aequalibus angulis, in idem incidant rectae prioris punctum: haec in illo puncto bifariam secta erit.

3o Si rectae alicui terminatae in ipsius extremis, ad easdem aut diversas partes, insistant duae rectae aequales, et sub angulis aequalibus; et ex unius termino ad punctum, in quo prior recta bifariam secta est, ducta sit recta; in alterius autem termino recta ducatur faciens cum ipsa angulum aequalem ei, quem prior ducta cum insistente contermina facit: ea in idem punctum, in quo scilicet prior recta bifariam secta est, incidet.

§. 281.

Casui III. haec respondebunt:

1mo Si a puncto, in quo recta aliqua bifariam di-

vîsa est, duae rectae sub angulis, quos altera cum altero segmento faciunt, aequalibus eductae sint (sive ad easdem, sive ad diversas partes,) et eidem in extremis ejus ad easdem partes insistant duae rectae sub angulis aequalibus, quarum una cum una eductarum concurrat: etiam altera cum altera educta concurret, et erunt tam eductae, quam insistentes illis concursibus terminatae inter se aequales, et eductae cum insistentibus aequales comprehendent angulos.

Atque hoc fere idem est, quod §. 280. Nro. 1.

2do Si a puncto in recta terminata sumto duae rectae (sive ad easdem, sive ad diversos prioris partes) eductae sint aequales et sub angulis aequalibus, quos altera cum altero segmento faciunt, et ab harum terminis ad extrema prioris rectae ductae intra dictos angulos duae rectae faciant aequales cum eductis angulos: prior recta in illo puncto bifariam secta erit, et ductae duae posteriores inter se aequales erunt, et ad priorem aequalibus insistent angulis.

§. 282.

Propositioni §. 103. 104. haec respondebunt:

1mo Si ad expositam rectam aliquam e duobus punctis extra ipsam sumtis (sive ad easdem, sive ad diversas expositae partes) duae rectae aequales et sub aequalibus angulis ductae sint, et rursus ex iisdem punctis aliae duae rectae, ad partes angulorum dictorum, ductae sint sub aequalibus ad priores ductas angulis, et earum una cum priori recta concurrat: etiam altera cum ipsa concurret, et ipsa cum sibi contermina prius ductarum segmentum rectae prioris intercipiet

aequale ei, quod prior posterius ductarum cum sibi contermina prius ductarum intercipit; etc.

2do Si in exposita recta duo segmenta sumta sint inter se aequalia punctis duobus in ea sumtis adjacentia, et ex iisdem duobus punctis eductae sint duae rectae sub aequalibus ad dicta segmenta angulis; ex alteris vero segmentorum extremis pariter eductae sint duae rectae sub aequalibus ad ea segmenta angulis; et earum una cum una prius eductarum, quae quidem eidem segmento contermina est, concurrat: etiam altera cum altera concurret; et aequalia erunt binarum sub aequalibus angulis eductarum segmenta a duabus reliquis eductis abscissa.

§. 283.

Ad §. 108. Conversa:

1mo Si e duobus punctis ad easdem aut diversas rectae alicujus terminatae partes sumtis, tam ad duo ejus extrema (ex altero nempe puncto ad alterum extremum,) quam ad aliud punctum in ipsa sumtum binae rectae ductae sint, quarum priores duae aequales sint, et cum duabus posterioribus aequales faciant angulos, itemque ad rectam terminatam aequalibus insistant angulis: erunt et duae posteriores aequales, et duo terminatae segmenta sunto in ipsa puncto facta erunt aequalia, et triangula his segmentis insistentia aequalia, et anguli, quibus duae posteriores ad ipsam inclinantur, aequales.

2do Si e duobus punctis ad easdem aut diversas expositae rectae terminatae partes sumtis, tam ad duo ejus extrema quam ad aliud punctum intermedium in

ipsa sumtum, binae rectae ductae sint, quarum duae posteriores sint aequales, et cum duabus prioribus aequales faciant angulos, itemque ad rectam terminatam aequalibus inclinentur angulis: erunt et duae priores aequales, et duo segmenta terminatae, quae a puncto intermedio fiunt, aequalia; et triangula his segmentis insistentia aequalia, et anguli, quibus duae priores ad ipsam inclinantur, aequales.

Sed haec pro II*da* hujus Capitis parte sufficiant: reliqua enim Cap. III. theoremata similiter, atque haec hactenus, convertentur.

CAPUT VII.

Continet Propositiones earum, quae Cap. V. traditae sunt, conversas, et easdem earum, quae Cap. VI., contrarias, ipsius autem Propositionis quartae Elementorum, et quae ipsius applicationes Cap. II. et III. continentur, contrarie conversas.

In Prooemio agitur de argumentationis apagogicae seu indirectae genere eo, quod procedit ἐκ διαιρέσεως, seu per propositionem hypotheticam habentem consequens disjunctum: et proponitur Theorema quoddam logicum elegans et ad inventionem ac demonstrationem perutile tum in ipsis hujus Capitis propositionibus, tum saepe alias.

§. 284.

Dictum est in Prooemio Capitis VIti de simplicissima demonstrationis indirectae seu apagogicae forma, quae haec erat, puta ad demonstrandum, esse A: Si non sit A; erit B: sed non est B; falsum igitur, non esse A; est ergo A. Ea argumentandi ratio apud

logicos nomen habet syllogismi hypothetici in modo secundo seu tollente; ut Proclus observat ad sextam primi Elementorum (Chrestom. geom. p. 221.) *Εν γαρ ταις εις αδυνατον απαγωγαις η πλοκη κατα το δευτερον εςι των ὑποθετικων. Οἱον, Ει μη εισι των ισας εχοντων (δυο) γωνιας τριγωνων αἱ ὑποτεινουσαι πλευραι τας ισας γωνιας ισαι, το ὁλον εςιν ισον τῳ μερει. Αλλα τουτο αδυνατον. Εισιν αρα των ισας εχοντων δυο γωνιας τριγωνων αἱ ὑποτεινουσαι πλευραι τας ισας γωνιας, και αυται ισαι.*

Alia autem aliquanto magis complexa indirectae argumentationis forma haec est, cum ad demonstrandum, esse A, sic concluditur: Si non sit A, erit aut B aut C. Sed non est B; itemque non est C. Non igitur A non est; est ergo A: ubi rursus propositio major, quam vocant Logici, et ipsa hypothetica est, sed habet consequens disjunctum in duos pluresve terminos: quae argumentandi ratio apud Logicos nomen habet dilemmatis, vel, ut ait Proclus, procedit *εκ διαιρεσεως*. Sic enim ille ad El. I., 19. (Chrestom. geom. p. 256.) *Ο' μεν ουν Γεωμετρης εκ διαιρεσεως το αδυνατων συλλογιζεται. — — Ει γαρ μη εςιν ἡ την μειζονα γωνιαν ὑποτεινουσα μειζων, εςιν η ιση η ελαττων. Αλλ' ει μεν ισαι και αἱ γωνιαι, ἁς ὑποτεινουσιν, ισαι, δια το πεμπτον. Ει δε ελασσων, και η γωνια, ἡν ὑποτεινει, ελασσων, δια το προ τουτου. — Εχουσι δε αναπαλιν αἱ γωνιαι. Μειζων αρα ἡ πλευρα της πλευρας.*

§. 285.

Postquam enim Euclides demonstravit in 5ta, trianguli aequicruris augulos ad basin aequales esse; et in 18a, trianguli inaequalia latera habentis majorem

esse angulum, quem majus latus subtendit: ex his in *19a* evincit: trianguli inaequales habentis angulos majus latus esse, quod majcrem angulum subtendit: idque ex eo demonstrat, quod nec aequale reliquo esse possit; alioquin et anguli aequales forent per *5tam*, qui sunt inaequales: nec minus; alioqui per *18am* minor esset, quem subtendit, angulus; qui est major per hypothesin. Atque huic simili vel quodammodo simpliciori argumentatione inferri poterat, nisi id jam in *6ta* alio modo ostensum fuisset, trianguli duos habentis angulos aequales, aequalia esse, quae illos subtendunt, latera: quod, si alterum altero esset majus, angulum quoque altero angulo majorem subtenderet per *18am*; qui tamen alteri aequalis est per hypothesin.

§. 286.

In hac argumentandi ratione haec observare possumus. Primo in *5ta* et *18a* subjecta sunt ejusdem generis (trianguli) duae species, in quas illud dividi potest (ratione habita aequalitatis vel inaequalitatis duorum laterum: in *5a* triangulum habens latera duo aequalia, in *18a* habens inaequalia:) deinde singulis his subjectis attribuuntur singula quaedam inter se diversa, quae itidem referunt species ejusdem generis secundum aliam divisionem (nempe ratione habita aequalitatis vel inaequalitatis angulorum duorum illis lateribus subtensorum:) ut, quod quidem triangulum latera duo aequalia, idem et angulos duos illis subtensos aequales habeat; quod vero alterum latus majus, idem et angulum illo subtensum majorem habeat. His igitur prae-

missis duabus propositionibus, protinus consequuntur duae aliae, quae sunt priorum conversae: ut, si species posteriori divisioni respondentes sumantur pro subjectis, iis attribuantur species prioris divisionis; veluti hic, triangulo aequales duos angulos habenti, aut alterum altero majorem, attribuuntur, aequalia habere latera subtendentia, aut latus majus, quod majorem angulum subtendat.

§. 287.

Quod generatim sic comprehendemus: Si genus aliquod dividatur in suas species duplici ratione, et singulis speciebus unius divisionis respondeant singulae species alterius ut attributa: vicissim etiam singulis speciebus alterius divisionis singulae species prioris ut attributa respondebunt.

Ut si genus quoddam A dividatur primum in species b, c, ac deinde in species β, γ: ut Omne A sit aut b aut c, et rursus Omne A sit aut β aut γ; et praeterea, quae sint ex specie b, iis attribuatur β; quae ex specie c, iis γ: his igitur positis, vicissim, quae sunt ex specie β, iis attribuetur b; et quae ex specie γ, iis attribuetur c.

Quod sic ostendetur; Si non iis A, quae sunt ex specie β, omnibus attribuatur b: cuicumque eorum non attribuitur, ei attribuetur c; quoniam Omne A est alterutrum, aut b aut c, per primam divisionem. Sed omnibus c etiam γ attribuitur per hypothesin. Ergo et omni β, quod non est b, attribuitur γ. Hoc vero fieri nequit: nulli enim β attribuitur γ, quia per hyp. nullum A est et β et γ, sed alterutrum eorum, per

divisionem secundam. Non ergo iis A, quae sunt ex specie β, non omnibus attribuitur b: ergo omnibus attribuitur. Similiterque ostendetur, omnibus, quae sunt ex specie γ, etiam c attribui. Quod erat ostendendum.

Pone pro A triangulum, pro b aequicrus, pro c habens latus alterum altero majus; pro β, habens angulos lateribus subtensos aequales; pro γ, habens angulorum lateribus subtensorum alterum altero majorem. Et his substitutis habebis ipsam demonstrationem §. 285. traditam.

§. 288.

Aliud exemplum praebent Elementorum primi propositiones 4*a*, 24*a*, 25*a*. Sint enim duo triangula, quae duo latera duobus lateribus, alterum alteri, aequalia habeant: ea aut angulum angulo, qui ab illis lateribus comprehenditur, aequalem habent, aut unum altero majorem. Ac rursus basin basi aut aequalem habent, aut alteram altera majorem. Et si quidem angulum illum angulo aequalem habent, basin quoque basi aequalem habent per 4*tam*: si vero angulum angulo majorem habent, basin quoque basi majorem habent per 24*am*. Hinc converse sequitur per hanc, de qua agimus, argumentandi rationem: 1*mo*. Si basin basi aequalem habeant, angulum quoque angulo aequalem habere: Sed hoc Euclides jam prius demonstraverat in 8*va*; ut eo hic non opus sit. 2*do*. Si basin basi majorem habeant, angulum quoque angulo majorem habere. Atque hoc est illud, quod Euclides demonstrat in 25*a*, in singulari exemplo adhibens illam argumentandi rationem, quam hic generali regula complexi sumus.

§. 289.

Similiter si plures quam binae sint species. Ut si Omne A sit aut b aut c aut; et rursus Omne A sit aut β aut γ aut δ; et quod quidem est b, sit et β; quod c, sit et γ; quod d, sit et δ: his positis, vicissim, quod est β, erit et b; et quod γ, erit et c; et quod δ, erit et d.

Et ostendetur sic: Si non omne, quod β, sit et b; ergo aliquod A sit β et non b: id erit aut c aut d, quoniam Omne A aut b est aut c aut d (supp.) Sed non potest esse c; alioqui foret et γ, quia Omne A, quod c, est et γ (supp.) Ergo idem foret et β et γ; quod fieri nequit, quoniam Omne A aut est β aut γ aut δ, nullum vero et β et γ: is enim illius divisionis vel disjunctionis sensus est. Ergo non potest aliquod A, quod sit β, esse c. Similiterque ostendetur, nec posse esse d. Falsum igitur, non omne A, quod sit β, esse b: ergo omne A, quod est β, erit et b. Similiterque ostendetur, omne A, quod sit γ, esse et c: et omne A, quod sit δ, esse et d. Quod erat ostendendum.

§. 290.

Exemplum hujus casus, ubi ternae species sunt divisionum, seu terni termini disjuncti, praebet argumentatio in Corolario Elem. IV, 5. Trianguli duobus lateribus in punctis, in quibus ea bifariam secantur, erectae perpendiculares aut intra triangulum concurrent, aut in basi, aut extra triangulum. Et si quidem intra triangulum; angulus duobus illis lateribus

comprehensus recto minor est: si in basi, rectus: si extra triangulum, recto major. Haec quidem ex demonstratione IV, 5. conjuncta cum III, 31. consequuntur. Atque his positis per hanc, de qua agimus, regulam syllogisticam vicissim consequetur: Si duo trianguli latera angulum recto minorem comprehendant, perpendiculares in punctis ea bifariam secantibus excitatas intra triangulum concurrere; si rectum, in basi trianguli; si recto majorem, extra triangulum.

Eadem argumentandi ratio adhibita fuit Cap. I. §. 6 — 8., cum ex eo, quod, si duae rectae in uno extremo altera alteri superimpositae, altero quoque extremo coincidunt, ut totae congruant, eae aequales sint; si vero una ultra alteram procurrat, procurrens major sit; citerius autem terminata minor; vicissim conclusum est: si duae rectae aequales sint, earum alteram alteri ab uno extremo superimpositam congruere; inaequalium vero majorem minori superimpositam prominere; minorem majori, citerius terminari. Et similiter, quae de angulis rectilineis exposita sunt §. 15. — 17.

Aliud exemplum praebent ea, quae ad demonstrationem 8vae primi Philonianam observata sunt in Chrestom. geom. pag. 236. Ac rursus §. 147. et 150. hujus.

§. 291.

Praeceptum vel Theorema logicum §. 287. traditum sic quoque enuntiari potest: Si aut primum sit aut secundum, et rursus aut tertium aut quartum; sit autem et primo tertium consequens, et secundo quartum: vicissim et tertio primum consequens erit et

quarto secundum; seu primum cum tertio, secundum cum quarto reciprocabuntur.

Et si aut primum sit aut secundum aut tertium, ac rursus aut quartum aut quintum aut sextum; sit autem et primo quartum, et secundo quintum, et tertio sextum consequens: vicissim et tertio primum, et quarto secundum, et sexto tertium consequentia erunt.

Et ita porro, si plures fuerint, modo totidem in utraque disjunctione, termini.

Cujus praecepti vel theorematis logici etsi frequens sit, ut vidimus, usus et ad inventionem prorsus egregius, et multa sint, quae vix aliter, quam adhibendo illo argumentandi genere demonstrari possint; tamen nullam uspiam ejus mentionem invenimus apud scriptores logicos: nisi quod affine theorema, vel potius illius conversum, apud Aristotelem legitur in Analyt. prior. Lib. II. cap. 22. in verbis: *παλιν ει παντι μεν τῳ* A et sequentibus; et apud Lambertum in ejus Novo Organo (Dianoiol. II. Hauptst. §. 97. 98, 1.)

Haec autem ideo visum est in exordio hujus capitis praemittere, quoniam, quae in eo deinceps tradentur propositiones, per illam ipsam argumentandi rationem, de qua disserimus, deducuntur ex Theorematis Cap. II. III., vel ex ipsa Elem. prop. *4ta*, conjunctis cum Theorematis Cap. V. vel eorum antesignano §. 208. Licebit autem, eadem prorsus ratione, qua in Cap. VI. idem factum est, praesens quoque Caput in duas partes dispertiri, quarum utraque habebit suum singulare theorema primarium cum sequentibus ipsi subjectis, specialibus et consectariis.

Pars I.

§. 292.

Theorema. Si duo triangula latus lateri aequale habeant, et angulum angulo, qui illi lateri adjacet; ipsum autem triangulum unum sit altero majus: illud et reliquum latus illi angulo adjacens majus habebit, et reliquum angulum priori lateri adjacentem majorem.

Fig. 127. Sint triangula ABC, DEF, habentia latus AB lateri DE aequale, et angulum BAC angulo EDF; ipsum autem triangulum ABC majus sit triangulo DEF: erit et reliquum latus angulo BAC adjacens AC majus reliquo latere angulo EDF adjacente DF, et reliquus angulus lateri AB adjacens ABC major reliquo angulo lateri DE adjacente DEF.

Si enim latus AC non sit majus latere DF; erit aut aequale aut minus. Aequale autem non est: alioquin et triangulum ABC triangulo DEF aequale esset per El. prop. 4*tam*: quod non est: non ergo latus AC lateri DF aequale. Sed nec minus erit: alioquin et triangulum ABC minus foret triangulo DEF, per ea quae ostensa sunt Cap. V. §. 208.; quod non est: Non ergo minus latus AC latere DF. Et ostensum est, quod nec aequale. Ergo majus est.

Cum igitur sit latus AB lateri DE quidem aequale, AC vero majus DF; angulus autem BAC major angulo EDF: erit et angulus ABC major angulo DEF, per §. 208. Quae erant demonstranda.

Et facile intelligetur, argumentationem hanc, qua ostendimus latus AC majus latere DF, esse ex illo genere, de quo modo egimus, quod procedit per divisionem vel disjunctionem duplicem. Nam duo triangula, quae latus lateri, et angulum angulo, illi lateri adjacentem, aequalem habent, aut reliquum latus reliquo aequale habent, aut unum altero majus. Et si quidem aequale; triangula ipsa aequalia erunt per El. prop. 4. Si vero majus: illud, quod majus habet hoc latus, erit et ipsum majus per §. 208. Ergo per praeceptum logicum supra expositum; vicissim, si duo illa triangula aequalia sunt, habent et reliquum latus reliquo aequale; id quod propositum fuit Cap. VI. §. 240. Si vero unum triangulum altero majus habebit et reliquum latus reliquo latere majus: quod est ipsum praesens Theorema.

Et patet, esse hoc Theorema conversum quidem ejus, quod traditum est Cap. V. §. 208; contrarium autem ejus, quod Cap. VI. §. 240; et denique contrarie conversum ipsius Euclidei primi in Prop. 4. El. Sequitur jam, ut ejus Consectaria aliqua juxta tenorem in Cap. II. et III. institutum, et in singulis deinceps Capitibus servatum, persequamur.

§. 293.

Theoremati I. (§. 32.) hoc respondebit contrarie conversum:

Si a puncto rectae angulum bifariam secantis ad rectas ipsum comprehendentes ductae duae rectae inaequalia terminent triangula: eae inaequalia ab illis rectis segmenta abscindent, majus quidem id, cui ma-

jus adjacet triangulum; et inaequalibus angulis ad rectam angulum bisecantem inclinatae erunt, quorum major erit ad partes majoris trianguli:

Theoremati II. (§. 34.) hoc.

Si diagonalis quadrilateri angulum bifariam, ipsum autem quadrilaterum in inaequalia secet: latera dictum angulum comprehendentia inaequalia erunt, majus quidem, quod est in majori portione; et angulus dicto angulo oppositus in inaequales divisus erit, quorum major erit ad partes majoris portionis.

Theoremati III. (§. 36.) hoc:

Si in triangulo recta e vertice ad basin ducta angulum quidem ad verticem bifariam, triangulum autem in inaequalia dividat: latera trianguli inaequalia erunt, et ducta recta sub obliquis basi angulis insistet; et erit majus latus et obtusus angulus in majori portione trianguli. (Chrestom. geom. §. 354. Satz 12.)

Theorematis V. et VI. (§. 38. — 39.) hoc:

Si in recta trianguli angulum ad verticem bifariam secante citra vel ultra basin sumtum sit punctum, e quo ad duo basis extrema ductae duae rectae, inaequalia terminent triangula communem cum priori triangulo habentia verticem: prius triangulum habebit latera inaequalia, quorum majus majori triangulorum inaequalium adjacet.

Theoremati VIII. (§. 43.) hoc:

Si triangulum recta e vertice ad basin perpendiculari ducta in inaequalia secetur: basis quoque et angulus ad verticem in inaequalia secabuntur, et erit tam majus basis segmentum, quam major anguli ad verticem pars in majori portione. (Chrestom. geom. §. 351. Satz 8.)

Theo-

Theoremati XII. (§. 47.) hoc:

Si ad verticem anguli rectilinei et extra ipsum angulum posita recta linea aequales faciat angulos cum duabus rectis illum angulum comprehendentibus, et ex ejus puncto aliquo ad dictas rectas ductae duae rectae inaequalia terminent triangula: eae inaequalia ab his rectis abscindent segmenta, quorum majus erit ad partes majoris trianguli; et inaequales angulos cum recta exteriori posita comprehendent, quorum item major erit ad partes majoris trianguli.

Theoremati XVI. (§. 51.) hoc:

Si eidem basi ad diversas partes insistant duo triangula angulum angulo aequalem habentia, qui eidem basis extremo adjacet, ipsa autem inter se inaequalia: habebunt et latus lateri, quod dicto basis extremo adjacet, inaequale, et reliquum ad basin angulum reliquo inaequalem; et erit tam majus latus quam major reliquus angulus in majori triangulo.

Theoremati XVII. (§. 52.) hoc:

Si duo triangula communi lateri ad diversas partes adjacentia angulum angulo aequalem habeant uni illius lateris extremo adjacentem et basi oppositum, ipsa autem sint inaequalia: habebunt et reliquum latus reliquo lateri inaequale, et reliquum angulum reliquo angulo, ex iis, qui communi lateri adjacent, inaequalem; et erit tam majus latus quam major angulus in majori triangulo.

§. 294.

Theoremati XX. (§. 56.) hoc respondebit contrarie conversum.

Si eidem basi ad diversas partes insistant duo tri-

angula, angulum angulo aequalem habentia, qui diversis basis extremis adjacet; ipsa autem inter se inaequalia: habebunt et latus lateri inaequale, quod dictis angulis adjacet, et reliquum ad basin angulum reliquo inaequalem; et erit tam majus latus quam major angulus in majori triangulo.

Theoremati XXI. (§. 57.) hoc:

Si duo triangula communi lateri ad diversas partes adjacentia, angulum quidem angulo aequalem habeant ad diversa ejus lateris extrema, ipsa autem inter se sint inaequalia: habebunt et reliquum latus reliquo inaequale, quod aequalibus angulis adjacet; et angulum reliquum ad latus commune reliquo inaequalem; et erit tam majus reliquum latus quam major reliquus angulus in majore triangulo.

Theoremati XXII. (§. 58.) hoc:

Si quadrilateri diagonalis cum oppositis duobus lateribus aequales faciat angulos, quadrilaterum autem in inaequalia dividat: erunt illa latera inaequalia, et anguli, quos eadem diagonalis cum reliquis duobus lateribus facit, inaequales; et erit majus inaequalium laterum et major inaequalium angulorum in majori quadrilateri portione.

§. 295.

Theoremati XXVIII. (§. 65.) hoc respondebit contrarie conversum:

Si ad rectam aliquam terminatam in duobus ejus extremis et ad easdem partes insistant duae rectae sub aequalibus angulis, et ex utroque prioris extremo ad oppositam insistentem ductae duae rectae inaequalia

terminent triangula: eae ab insistentibus segmenta abscindent inaequalia, majus quidem ea, quae majus triangulum terminat; et ad priorem rectam inaequalibus inclinabuntur angulis, majori rursus eadem.

Theoremati XXX. (§. 67.) hoc:

Si eidem basi ad easdem ipsius partes duo insistant triangula, angulum angulo aequalem habentia ad duo diversa basis extrema, ipsa autem inter se inaequalia: habebunt et latus lateri inaequale, quod dicto angulo adjacet, et reliquum ad basin angulum reliquo inaequalem; sic quidem, ut et majus latus et major reliquus angulus sit in majori triangulo.

Theoremati XXXI. (§. 68.) hoc:

Si quadrilateri duae diagonales aequalibus inclinentur ad basin angulis, inaequalia autem terminent triangula basi insistentia: erunt eae diagonales inaequales, et anguli, quibus latera duo basi insistentia ad basin inclinantur, inaequales; sic quidem, ut et major diagonalis et major dictorum angulorum sit in majori triangulo.

§. 296.

Theoremati XXVII. (§. 75.) hoc respondebit contrarie conversum:

Si ab extremis duarum rectarum aequalium in concursu angulum facientium ad illas rectas alternas ipsas vel productas ductae duae rectae inaequalia terminent triangula: eaedem et segmenta ipsarum inaequalia abscindent concursui adjacentia, majus quidem id, cui majus adjacet triangulum; et in aequalibus ad aequales rectas inclinabuntur angulis, majori rursus ea, quae majus terminat triangulum.

§. 298.

Casui IIIo (§. 95.) haec:

1o. Si ad rectam aliquam terminatam in puncto, in quo bifariam secta est, inclinatae ad easdem aut diversas partes sint duae rectae sub aequalibus ad duo segmenta angulis, et ex earum terminis ad extrema prioris ductae duae rectae inaequalia terminent triangula: erunt rectae inclinatae inaequales, major quidem, cui majus adjacet triangulum; et duae posteriores ductae cum priori inaequales facient angulos, majorem quidem eum, qui est in majori triangulo.

2o. Si ad rectam terminatam in puncto in ipsa sumto inclinatae sint ad easdem aut diversas partes duae rectae aequales sub angulis aequalibus; et hos angulos subtendentes rectae ab inclinatarum terminis ad extrema prioris ductae inaequalia abscindant triangula: recta prior in inaequalia in sumto illo puncto secta erit, et majus segmentum, cui insistit majus triangulum; et anguli, quos posteriores ductae cum inclinatis faciunt, inaequales erunt, major quidem is, qui est in majori triangulo.

§. 299.

Theorematí IV. (§. 108.) haec:

1o. Si e duobus punctis ad easdem aut diversas alicujus rectae terminatae partes sitis ad duo ejus extrema (ex altero nempe puncto ad alterum extremum) ductae duae rectae aequales sint, et ex iisdem ad aliquod punctum in ipsa sumtum ductae duae rectae cum prioribus aequales faciant angulos, inaequalia vero

terminent triangula: inaequales erunt tam rectae duae posteriores, quam anguli, quibus priores ductae ad rectam terminatam inclinantur; et erit major rectarum inaequalium et major angulus, cui adjacet majus triangulum.

2o. Si ex duobus punctis ad easdem aut diversas rectae alicujus terminatae partes sitis ad punctum in ipsa situm ductae duae rectae sint aequales, et ab iisdem ad prioris extrema ductae duae aliae rectae, aequales cum prioribus faciant angulos, triangula vero terminent inaequalia: posteriores ductae inaequales erunt, et anguli, quibus priores duae ad rectam terminatam inclinantur, inaequales erunt, et major illarum et horum in majori triangulo.

Sed haec pro hac prima parte sufficiant.

P a r s IIda.

§. 300.

T h e o r e m a alterum Euclidei primi in prop. 4. El. contrarie conversum; ejus, quod §. 208. tractatum est, conversum; quod §. 240., seu Elem. I., 26*ae.* partis 1*ae.* contrarium:

Si duo triangula latus lateri aequale habeant, et angulorum illi lateri adjacentium unum quidem uni aequalem, alterum vero alteri inaequalem: quod majorem ex his habet angulum, habebit et latus subtendens majus, et ipsum erit triangulum altero triangulo majus.

Habeant triangula ABC, DEF latus AB lateri DE aequale, et angulum quidem BAC angulo EDF aequalem, angulum vero ABC angulo DEF majorem: erit et latus AC majus latere DF, et triangulum ABC majus triangulo DEF. *Fig. 127.*

Si enim latus AC latere DF non sit majus, erit aut aequale aut minus. Non vero aequale est: alioquin et angulus ABC angulo DEF aequalis esset per El. prop. 4. Nec minus: alioquin et angulus ABC angulo DEF minor esset per §. 208. Ergo majus est latus AC latere DF.

Cum ergo triangula ABC, DEF habeant latus AB lateri DE aequale (supp.), et latus AC latere DF majus (per ostensa); angulum vero BAC angulo EDF aequalem (supp.): erit et triangulum ABC, triangulo DEF majus per §. 208. Quae erant ostendenda.

Posset et demonstratio institui sine §. 208. immediate per El. prop. 4., sed usurpando eandem argumentationem, quae §. 208. adhibita est. Alia demonstratio per El. I., 23., 26. indicatur in Chrestom. geom. pag. 262. Satz 5.

Hujus jam sequuntur Consectaria immediata juxta tenorem Cap. II. et III.: quorum ceterum demonstratio similiter, ac praecedentis per El. prop. 4. et §. 208, per Theoremata respondentia in Cap. II, III. et Cap. V. institui potest.

§. 301.

Theoremati I. (§. 32.) hoc respondebit contrarie conversum:

Si a termino rectae angulum bifariam secantis

ductae duae rectae sub inaequalibus ad ipsam angulis occurrant rectis illum angulum comprehendentibus: inaequalia ab illis rectis abscindent segmenta, majus quidem ea, quae sub majori angulo ducta est; et inaequalia terminabunt triangula, majus quidem ea rursus, quae sub majori angulo ducta est. Notandum autem et hoc: quod, si sub majori angulo educta occurrat uni rectarum priorem angulum comprehendentium, sub minori educta necessario alteri occurret.

Theoremati II. (§. 34.) hoc:

Si quadrilateri duorum angulorum oppositorum unus quidem bifariam, alter vero in inaequales secetur diagonali: latera priorem angulum comprehendentia inaequalia erunt, majus quidem, quod majorem angulum ex inaequalibus subtendit; et quadrilaterum ipsum in inaequales portiones divisum erit, quorum major majori angulo adjacet.

Theoremati III. (§. 36.) et VIII. (§. 43.) haec duo:

1. Si in triangulo recta e vertice ad basin perpendicularis ducta angulum ad verticem in inaequales secet: basin quoque et ipsum triangulum in inaequalia secabit, et erit tam majus basis segmentum, quam major trianguli portio ad easdem partes, ad quas est major pars anguli ad verticem. (Chrest. geom. pag. 350. Satz 6.)

2. Si in triangulo recta linea e vertice ad basin ducta, angulum quidem ad verticem bifariam dividat, basi autem insistat inaequalibus, hoc est, obliquis, qui deinceps sunt, angulis: inaequalia erunt tum trianguli latera, tum ipsae trianguli portiones, et majus tum

latus tum trianguli portio ad partes majoris anguli ex duobus inaequalibus (hoc est, per El. I., 13. obtusi ex duobus obliquis.) (Chrest. geom. pag. 353. Satz 10.)

Theorematis V. et VI. (§. 38., 39.) hoc:

Si in recta trianguli angulum ad verticem bifariam secante citra vel ultra basin sit punctum, e quo ad duo basis extrema ductae duae rectae faciant inaequales cum dicta angulum bisecante angulos: erunt trianguli latera inaequalia, majus quidem ad partes majoris ex duobus angulis inaequalibus.

Theoremati XII. (§. 47.) hoc:

Si extra angulum ad verticem ejus posita sit recta linea cum rectis illum comprehendentibus faciens aequales angulos; et e puncto in ipsa sumto sub inaequalibus ad ipsam angulis ductae duae rectae occurrant prioribus rectis: inaequalia ab ipsis segmenta abscindent, et inaequalia triangula terminabunt, quorum utriusque majus erit ad partes majoris anguli. Et notandum est, quod, si sub majori angulo ducta occurrat, sub minori ducta necessario occurrere debet.

Theoremati XV. (§. 50.) hoc:

Si rectae alicui in utroque ipsius extremo ad diversas partes insistant binae rectae, quarum duae quidem, quae sunt ad unum extremum, aequales cum ipsa faciant angulos; duae vero, quae ad alterum, inaequales; et binae, quae ad easdem prioris rectae partes sunt, concurrant: rectarum priori extremo insistentium, ad concursum usque sumtarum, major erit ea, quae majori ex inaequalibus angulis opponitur; et triangulum quoque majus erit ad partes illius anguli. Notandumque est, quod, si duae ad easdem partes

prioris concurrant, quarum una cum priori majorem faciat angulum ex dictis inaequalibus, duae reliquae, quae ad alteras partes sunt, necessario concurrent.

Theorematі XVI. (§. 51.) hoc:

Si eidem basi ad diversas partes insistentia duo triangula angulum angulo in uno quidem basis extremo aequalem habeant, in altero vero inaequalem: habebunt et latus lateri, quod priori extremo adjacet, inaequale, majus quidem id, quod subtendit majorem angulum ex inaequalibus; et ipsorum triangulorum majus erit id, quod habet majorem angulum.

Theoremati XVII. (§. 52.) hoc:

Si duo triangula communi lateri ad diversas partes adjacentia angulum angulo in uno quidem illius lateris extremo aequalem habeant, eum, qui basi opponitur; in altero vero inaequalem, qui est ad basim: habebunt et reliquum latus reliquo lateri inaequale, et ipsa inter se inaequalia erunt; et erit majus latus, quod majorem angulum subtendit, et majus triangulum, quod eundem majorem habet angulum.

§. 302.

Quibus et haec adjungi possunt:

Ad Theor. V., VI. (§. 38. 39.):

Si in recta trianguli aequicruris angulum ad verticem bifariam secante citra vel ultra basin sumtum sit punctum, e quo eductae sint duae rectae sub angulis ad ipsam inaequalibus, quorum quae sub majori angulo educta, vergat ad unum basis extremum: ea, quae sub minori angulo educta est, ipsi cruri, quod reliquo basis extremo adjacet, occurret.

Ad Theorema XII. (§. 47.):

Si extra triangulum aequicrus a vertice ipsius ducta sit recta faciens cum utroque crure angulos aequales, et ex ipsius puncto ad diversas partes ductae siint duae rectae, quarum altera sub majori angulo educta vergat ad unum basis extremum: altera sub minori angulo educta in punctum aliquod ipsius cruris, quod ad easdem partes est, incidet.

Ad Theorema VIII. (§. 43.):

Si rectae alicui insistat altera perpendicularis, ad quam in uno ipsius puncto et ad diversas ipsius partes eductae sint duae rectae sub angulis inaequalibus: si harum ea, quae sub majori angulo educta est, priori rectae occurrat; eaquae sub minori educta est, necessario eidem occurret.

Et porro haec:

Ad Theorema I. (§. 32.):

Si e duarum rectarum aequalium angulum comprehendentium terminis eductae sint intra illum angulum duae rectae sub angulis ad ipsas inaequalibus, quarum ea, quae sub majori angulo educta est, occurrat rectae angulum illum bifariam secanti in aliquo puncto: ea, quae sub minori angulo educta est, eidem occurret in puncto aliquo citeriori.

Ad Theorema VIII. (§. 43.):

Si ad rectam terminatam in ipsius duobus extremis et ad easdem partes ductae sint duae rectae sub angulis inaequalibus, quarum ea, quae sub majori angulo, occurrat rectae terminatam illam bifariam et ad angulos rectos secanti: ea, quae sub minori angulo, eidem rectae occurret in puncto aliquo citeriori.

Ad Theorem. XII. [§. 47.]:

Si e duarum rectarum aequalium angulum comprehendentium terminis eductae sint extra illum angulum duae rectae sub angulis ad ipsas inaequalibus, quarum ea, quae sub majori angulo educta est, occurrat rectae exteriori ad prioris anguli verticem positae et cum dictis rectis aequalibus comprehendenti angulos aequales: ea quae sub minori angulo educta est, eidem exteriori occurret, et in puncto quidem prioris anguli vertici propiori.

§. 303.

Theoremati XX. [§. 56.] hoc respondebit contrarie conversum:

Si eidem basi ad diversas partes insistentia duo triangula angulum angulo in diversis basis extremis unum quidem uni aequalem, alterum vero alteri inaequalem habeant: habebunt et latus lateri, quod inaequalibus angulis opponitur, inaequale, majus quidem, quod majori angulo opponitur; et ipsa triangula inter se inaequalia erunt; majus, quod habet majorem ex inaequalibus angulis.

Theoremati XXII. [§. 58.] hoc:

Si quadrilateri diagonalis cum duobus oppositis lateribus aequales, cum reliquis vero inaequales faciat angulos: inaequalia erunt opposita latera priora; majus quidem, quod majori angulo ex inaequalibus opponitur; et ipsum quadrilaterum in inaequales portiones divisum erit, quarum major erit ad partes majoris anguli.

Et Theoremati XVIII. (§. 54.) hoc quoque:
Si rectae alicui terminatae in utroque ipsius extremo insistant binae rectae, quarum duae quidem, quae sunt ad diversa extrema et diversas partes, aequales cum ipsa faciant angulos, duae reliquae autem inaequales; posteriorum autem ea, quae majorem angulum facit, cum ea priorum, quae ad easdem partes ipsi opposita est, concurrat: etiam reliqua posteriorum, quae minorem angulum facit, cum reliqua priorum concurret; et minus, quam prior concurrens, segmentum oppositae et minus triangulum terminabit.

§. 304.

Theoremati XXVIII. (§. 65.) hoc respondebit contrarie conversum:
Si ad rectam terminatam in duobus ejus extremis et ad easdem partes insistant duae rectae sub aequalibus angulis, et rursus aliae duae sub inaequalibus angulis, quae cum prioribus, altera cum altera concurrant: posteriores inaequalia a prioribus segmenta abscindent, et inaequalia triangula terminabunt, majus quidem ea, quae sub majori ex duobus inaequalibus angulis insistit. Et notandum est, quod, si ea posteriorum, quae sub majori angulo insistit, cum opposita priorum concurrit, necessario et reliqua posteriorum cum reliqua priorum concurret.

Theoremati XXX. (§. 67.) hoc:
Si eidem basi et ad easdem ipsius partes duo insistant triangula, angulum angulo ad diversa basis extrema unum quidem uni aequalem, alterum vero alteri inaequalem habentia: habebunt et latus lateri

inaequale, quod inaequales angulos subtendit; majus quidem, quod majorem; et triangula inter se inaequalia erunt; majus, quod majorem habet angulum.

Theorema ti XXXI. (§. 68.) hoc:

Si in quadrilatero duo quidem opposita latera aequalibus, duae vero diagonales inaequalibus ad basim inclinentur angulis: erunt dicta duo latera inaequalia, majus quidem id, quod majorem ex angulis inaequalibus subtendit: et triangula duo basi insistentia et diagonalibus terminata inaequalia erunt; majus, quod majori angulo adjacet.

Theoremati XXXII. (§. 69.) hoc:

Si in quadrilatero duae quidem diagonales aequalibus, duo vero latera opposita inaequalibus ad basin inclinentur angulis: erunt diagonales inaequales, major quidem ea, quae majorem angulum ex inaequalibus subtendit; et triangula duo, quo basi insistunt a diagonalibus terminata, inaequalia erunt; majus quidem id, quod majori angulo adjacet.

§. 305.

Theoremati XXXVII. (§. 75.) hoc respondebit contrarie conversum:

Si intra angulum ductae duae rectae uno suorum extremorum segmenta crurum abscindant aequalia vertici anguli adjacentia, angulos vero cum illis segmentis faciant inaequales: eaedem altera segmenta inaequalia abscindent, majus quidem id, quod majori angulo opponitur; et triangula terminabunt inaequalia; majus, quod majori angulo adjacet. Et notandum est:

si ea, quae majorem cum uno segmentorum aequalium facit angulum, cum opposita rectarum priorem angulum comprehendentium concurrit; etiam ea, quae minorem angulum facit, cum altera necessario concurret.

§. 306.

In Cap. III. Theor. I. Cas. II. (§. 93.) haec respondebunt contrarie conversa:

1mo. Si rectae alicui terminatae in ipsius extremis ad easdem aut diversas partes insistant duae rectae sub angulis aequalibus; in puncto autem, in quo illa bifariam secta est, ductae duae rectae sub angulis ad ipsam inaequalibus, prioribus insistentibus occurrant: (occurret autem sub minori angulo ducta necessario, si sub majori ducta occurrit): ea, ab insistentibus abscindent segmenta inaequalia, et inaequalia terminabunt triangula; majus quidem ea, quae sub majori angulo ducta est.

2do. Si rectae terminatae in ipsius extremis duae rectae aequales et sub angulis aequalibus, sive ad easdem sive ad diversas partes, insistant, et ex harum terminis ad punctum aliquod prioris ductae duae rectae inaequales cum insistentibus faciant angulos: recta prior in illo puncto in inaequalia secta erit, et majus segmentum, cui opponitur major angulus; et triangula his segmentis inaequalia insistent; majus, quod habet majorem angulum.

§. 307.

Casui III. (§. 95.) haec:

1mo. Si rectae alicui terminatae in puncto, in quo

bifariam secta est, sive ad easdem sive ad diversas partes inclinatae sint duae rectae sub aequalibus ad duo segmenta angulis; et ad eandem rectam ex ipsius extremis ductae duae rectae sub inaequalibus ad ipsam angulis, occurrant illis inclinatis; (occurret autem sub minori angulo ducta necessario, si sub majori ducta occurrit): eae ab inclinatis abscindent segmenta inaequalia, et triangula terminabunt inaequalia; majus quidem ea, quae sub majori angulo ducta est.

2do. Si ad rectam terminatam in puncto in ipsa sumto, sive ad easdem sive ad diversas partes, insistant duae rectae aequales et sub angulis aequalibus; et quae hos angulos subtendunt rectae ab insistentium terminis ad extrema prioris ductae, inaequales faciant angulos cum insistentibus: recta prior in illo puncto in inaequalia secta erit, sic ut majus segmentum majori angulo opponatur; et triangula his segmentis insistentia inaequalia erunt; majus, in quo major est angulorum inaequalium.

§. 308.

Theoremati IV. (§. 108.) haec:

1mo. Si e duobus punctis ad easdem aut diversas alicujus rectae terminatae partes sitis ad duo ejus extrema (ex altero nempe puncto ad alterum extremum) ductae duae rectae aequales sint, inaequalibus autem ad ipsam inclinentur angulis; ex iisdem autem ad punctum aliquod in ipsa sumtum ductae duae aliae rectae cum prioribus aequales faciant angulos: erunt duae rectae posteriores inaequales, et major ipsarum, quae majorem angulum subtendit, et duo triangula ipsis ad-

ja-

jacebunt inaequalia, et majus erit, quod majorem habet angulum.

2do. Si e duobus punctis ad easdem aut diversas rectae alicujus terminatae partes sitis ad punctum aliquod in ipsa situm ductae duae rectae sint aequales, inaequalibus vero angulis inclinatae; et ab iisdem ad prioris extrema ductae duae aliae rectae aequales cum prioribus faciant angulos; posteriores ductae inaequales erunt; major, quae majorem subtendit angulum; et triangula ipsis adjacentia inaequalia erunt; majus, quod majorem habet angulum.

Atque haec pro hujus Capitis instituto sufficiant.

§. 309.

Unum tamen adhuc Appendicis loco subjungimus, ope duorum principalium hujus Capitis theorematum §. 292, 300: demonstrari posse propositionem, quae inservit ad demonstrandam El. I., 6., hanc:

Si triangulum angulos ad basim habeat aequales; segmentum quodlibet utriusvis lateris sumto in ipso puncto et basi interceptum erit minus altero latere.

Sit triangulum ABC habens ad basin BC aequales angulos ABC, ACB; et in uno latere AC segmentum sit DC puncto quocumque in ipso sumto D et basi interceptum: dico id segmentum minus esse altero latere AB. Et similiter, lateris AB sumtum segmentum quodlibet EB minus esse latere AC. *Fig. 128.*

Jungatur BD. Et

1mo. Per §. 292. Quoniam triangula ABC, DCB habent latus BC commune, et angulum ABC angulo

DCB aequalem, qui illi lateri adjacet; est autem triangulum ABC majus triangulo DCB: habebit et latus dicto angulo adjacens majus, hoc est, latus AB majus latere DC, seu DC minus AB. Et similiter ostendetur segmentum EB minus latere AC. Quod erat ostendendum.

Vel 2*do* per §. 300. Quoniam triangula ABC, DCB habent latus BC commune, et angulorum illi lateri adjacentium unum quidem ABC uni DCB aequalem, alterum autem ACB altero DBC majorem (cum sit per supp. angulus ACB aequalis ABC, ergo major DBC): ergo per §. 300. triangulum ABC, quod majorem habet angulum, habebit et latus subtendens majus, nempe AB majus DC.

Alia enuntiatio. Si triangulum angulos ad basim habeat aequales, et ab uno basis extremo intra triangulum ducta recta occurrat lateri opposito: ea ab hoc latere segmentum abscindet basi adjacens minus reliquo latere.

Aliter. Si triangulum angulos ad basin habeat inaequales, et ab extremo basis, ad quod est minor angulus, ducatur recta faciens cum basi angulum majori angulo aequalem, quae occurrat lateri opposito ultra verticem producto: ea major erit illo latere opposito.

§. 310.

Huic analoga est et similiter demonstratur haec: Si triangulum angulos ad basim habeat aequales: segmentum quodlibet utriusvis lateris ultra verticem producti, sumto ultra verticem puncto et basi interceptum, majus erit reliquo latere.

Vel. Si triangulum habeat angulos ad basim aequales, et ab uno basis extremo ducta extra triangulum recta occurrat producto ultra verticem lateri opposito: ea ab hoc segmentum abscindet basi adjacens majus reliquo latere.

Aliter. Si in triangulo habente angulos ad basim inaequales, ab extremo basis, ad quod est major angulus, recta faciens cum basi angulum aequalem minori angulo ducatur ad occursum usque lateris oppositi: ea minor erit illo latere opposito.

§. 311.

Jam ex una harum propositionum (§. 309. 310.) prona est illatio El. I, *6ae*; et ea nititur, si rem ulterius resolamus, sequenti generatiori, et quod ad Mathesin universalem pertinet.

Lemmate. Si duarum magnitudinum utraque major sit sumta magnitudine quacumque minori quam altera: eae duae magnitudines aequales erunt. Itemque, si duarum magnitudinum utraque minor sit sumta magnitudine quacumque majori quam altera: illae aequales erunt.

Sint enim duae magnitudines A et B, quarum una A sit major magnitudine quacumque, quae sit minor altera B; et rursus altera B sit major magnitudine quacumque, quae sit minor priori A: dico magnitudines A et B aequales esse.

Si enim non sint aequales: erit altera major; sit A major B excessu quocumque: erit igitur B aequalis ipsi A illo excessu multatae, hoc est, minori magnitudini quam A. Sed per hyp. non est B aequalis ulli

magnitudini minori quam A, sed major quacumque. Non ergo erunt A et B inaequales; ergo aequales.

Et similiter altera pars Lemmatis ostenditur.

Potest et sic enuntiari: Si duarum magnitudinum utraque aucta incremento quocumque, major sit altera magnitudine; aut si utraque diminuta particula quacumque, minor sit altera magnitudine: eae duae magnitudines aequales erunt.

Vel: Si magnitudo quaelibet major unae duarum magnitudinum, sit et major altera ipsarum; et vicissim: eae duae magnitudines aequales erunt. Et si magnitudo quaelibet minor una duarum magnitudinum, sit et minor altera; ac vicissim: illae duae aequales erunt.

§. 312.

Per hoc igitur Lemma et unam propositionum §§. 309. 310. ipsa El. I, 6ta sic ostendetur:

Fig. 129. Si triangulum ABC habeat angulos ABC, ACB aequales: habebit et latera illos subtendentia AC, AB aequalia. Sumta enim quacumque DC minori quam AC, est AB major DC (§. 309.) Similiterque sumta quacumque EB minori AB, est AC major EB. Ergo per praec. Lemma aequales erunt duae AB AC.

Quod enim supra diximus §. 236. 237., demonstrationes apagogicas, si pluribus constet partibus argumentatio, posse in duas aut plures demonstrationes simpliciores resolvi; id nonnumquam sic fieri potest, ut praecedens quidem, vel praecedentes aut omnes aut ex parte indirectae sint, ultima autem directa.

Quae res inservire potest, ut in eorum gratiam, qui demonstrationibus indirectis, cum eae longiores sunt et ex pluribus partibus constant, offenduntur, illae ita dissolvantur, ut non quidem in totum supersedeatur indirecta argumentandi ratione, sed res tamen facillimo et simplicissimo ejus genere perficiatur. Cf. quae dicit cel. Lacroix de demonstrationibus apagogicis, cujus verba inseruimus Chrestom. geom. pag. 218.

§. 313.

Ceterum directe ostendi potest El. I, 6*a*. ratione simili ei, qua apud Pappum et Proclum ostenditur I, 5*a*.; idem triangulum ABC ut duplex considerando, ope duarum propositionum Cap. VI. §. 240. 263. sic:

Quoniam triangulum habens latus BC et angulum adjacentem ABC triangulo habenti latus idem BC et angulum adjacentem ACB angulo dicto ABC aequalem est aequale (idem est enim triangulum): erit et reliquum illi angulo adjacens latus reliquo aequale (per §. 240.), hoc est, AB aequale AC. q. e. d. *Fig. 130.*

Vel, Quoniam est triangulum ABC habens latus BC et angulos adjacentes ABC, ACB; et triangulum ACB habens latus idem CB, et angulos ipsi adjacentes ACB, ABC prioribus, alterum alteri, aequales: per §. 263., erit et latus lateri aequale, quod unum angulorum aequalium subtendit, ergo latus AB lateri AC; q. e. d. (cf. Chrestom. geom. pag. 219, 2.)

CAPUT VIII.

Continet alias propositiones contrarie conversas propositionis quartae Elementorum et ejus consectariorum in Cap. II. et III.; ut minus determinatas illis Capitis VII., sic procliviori consecutione ex directis suis profluentes: de cujus consecutionis ratione agitur in prooemio.

§. 314.

In Capitis VII. propositionibus, quae erant contrarie conversae propositionum Capitis II. et III., inaequalitas semper fuit determinata hoc sensu, ut diceretur, utrum duorum inaequalium esset altero majus in consequente, et quomodo responderet majori in antecedente. Sed in geometricis demonstrationibus nonnunquam accidit, ut ostendi queat, duas magnitudines inter se inaequales esse; utra major sit, non statim queat. Velut in I, 6ae. Elem. demonstratione continetur hoc, si rem paullo curatius consideraveris: si triangulum habeat duo latera inaequalia, angulos iis subtensos non posse aequales esse, ergo esse inaequales: sed non, uter eorum major sit, quod demum in 18a. primi docetur. Sic et in demonstratione I, 7ae. con-

inetur hoc (vid. fig. textus graeci): Si latera ΓA, AB lateribus ΔA, AB aequalia sint, comprehendant autem angulum ΓAB majorem ΔAB, non esse posse ΓB, ΔB aequales, inaequales igitur esse: non autem, utra major sit; nempe ΓB: quod tamen in I, 24. docetur.

Itaque nunc ad alias devenimus propositiones contrarie conversas *4tae* Elementorum et ipsius consectariorum Cap. II. et III. traditorum: in quibus determinatio illa inaequalium, utrum eorum majus sit, locum non habebit, sive quia per ipsam rei naturam determinatio ista non obtinet, sive quia, etsi obtinet, hoc quidem loco demonstrari nequit: ut contenti esse debeamus simplici asserto, inaequalitati quorundam inaequalitatem quorundam aliorum consequentem esse. Quae propositiones ut minus erunt determinatae quam illae Cap. VII*mi*: ita etiam minori, quam illae, negotio et circuitu demonstrabuntur: profluent enim immediata fere consecutione ex ipsa El. I., 4., vel ejus in Cap. II., III. consectariis.

§. 315.

Quo autem planius perspiciatur tota, qua in his utendum erit, argumentatio: initium facimus a simplicissima contrariarum conversionum forma, quae haec est: Si antecedenti alicui A consequens fuerit B: dicimus contrarie convertendo, antecedenti Non — B consequens esse Non — A. Item, si subjecto alicui A attributum sit B: dicimus, subjecto Non — B attribui Non — A: quod quidem antiquitus ab auctoribus logicis dicitur, per contrapositionem conver-

tere. Prius autem illud: si ipsi A consequens sit B, etiam ipsi Non — B consequens esse Non — A; ipsum fundamentum est omnis apagogicae demonstrationis, et principium ejus syllogismi, qui dicitur fieri in modo secundo seu tollente hypotheticorum; et ab Aristotele sic enuntiatum legitur in Analyt. prior II. Cap. 4. *Ὅταν δυο ἐχῃ ὁυτω προς ἀλληλα, ὥϛε θατερȣ οντος, ἐξ αναγκης θατερον ειναι· τȣτȣ μη οντος μεν, ουδε θατερον εϛαι· οντος δε, ȣκ αναγκη ειναι θατερον*; hoc est: Cum duo ita inter se affecta sunt, ut, si unum sit, necessario sit alterum: nisi hoc sit, neque illud erit: sed si sit, non necesse est illud esse.

Huic affine est illud: Si posito aliquo, aliud tollitur: etiam posteriori posito, prius tollitur. Ut si posito esse A, non sit B: converse verum erit, posito B, non esse A: nam si esset, B non esset. Cui rursus hoc respondet in Categoricis: Si de omni priori negatur posterius; etiam de omni posteriori negatur prius; seu si nulli priori attribuitur posterius, etiam nulli posteriori attribuitur prius: quod nihil aliud est, quam praeceptum apud Logicos notum: propositionem universalem negantem quamlibet converti simpliciter. Quod sic demonstrat A r i s t o t e l e s in A n a l y t. p r i o r. Lib. I. Cap. 2. *Εϛω ϛερητικη καθολȣ ἡ AB προτασις. Ει ȣν μηδεν των B τῳ A ὑπαρχει· οὐδε των A ουδενι ὑπαρξει το B. Ἐι γαρ τινι, ὁιον τῳ Γ· ουκ αληθες ἔϛαι το μηδενι των B το A ὑπαρχειν· το γαρ Γ των B τι εϛι.* Ac similiter L a m b e r t u s demonstrat illam, de qua supra diximus, conversionem per contrapositionem, nempe si omni A attribuatur B; nulli eorum, quae non sunt B, attribui A (in O r g a n o n o v o D i a n o i o l. §. 354.)

§. 316.

Ab hac simplici forma progrediamur ad compositas. Itaque si unum antecedens plura habeat consequentia: patet, sublato horum quocunque tolli antecedens. Ut si, posito esse A, consequens sit, esse et B et C et D: converse si B non sit, aut si C non sit, aut si D non sit, efficietur, ut neque sit A. Sed si antecedentia duo fuerint, vel si antecedens duabus constet partibus: sequitur, ut, si una harum ponatur, consequens autem tollatur, reliqua quoque antecedentis pars tollatur. Ut si antecedentibus A et B conjunctis consequens sit C, colligetur: si fuerit A, sed non C; nec B futurum esse: quoniam, si B foret, cum sit A, etiam C foret. Itemque, si fuerit B et non C, nec A futurum.

Rursus si pluribus antecedentibus conjunctis consequens sit aliud aliquid tolli: vicissim, si hoc aliud ponatur, positis et antecedentibus omnibus praeter unum, hoc unum reliquum tolletur. Ut si positis A et B consequens sit, tolli C: vicissim, si ponatur C et A, tolletur B: si enim poneretur, quum et A ponatur, tolleretur C; quod tamen ponebatur. Et si positis A et B et C, consequens sit tolli D: vicissim, si ponatur D et praeterea A et B, tolletur C: nam si poneretur, D tolleretur per praemissam hypothesin.

Si denique et antecedens pluribus constet partibus, et ei consequentia sint plura; puta, ut, si A et B et C sint, sint etiam D atque E: hinc colligetur: si A quidem et B sint, non vero sit D, vel non sit E: nec C fore. Itemque si A et C sint, non vero D, vel

non E: nec B fore. Et si B et C sint, D vero aut E non sit: nec A fore.

§. 317.

Haec, quae de contraria vel per contrapositionem conversione proposuimus §§. 315. 316., sic quoque ostendi directe possunt per naturam negativarum propositionum.

Primo ponamus nullum A esse B: negamus ergo esse quicquam, quod idem sit A et B: ergo et nullum B esse A aserimus.

Jam omne A sit B. Negatur ergo esse quicquam, quod idem A sit et non B. Ergo nihil eorum, quae non sunt B, erit A; seu omni Non A attribuetur, non esse B.

Jam omne, quod est A, idemque B, sit et C. Negatur ergo esse aliquid, quod sit A et B, et non idem C; seu negatur, quicquam, quod A sit et non C, esse B: ergo Omne quod est A et non C, neque erit B.

Haec quidem in categoricis. Sit jam hypothetica haec: Si *το* A est, non est *το* B. Negatur ergo fieri posse, ut simul sit et *το* A et *το* B. Ergo et, si est *το* B, non erit *το* A.

Sit haec: Si est A, est et B. Negatur ergo fieri posse, ut simul sit A et non B. Asseritur ergo: Si non est B, neque est A.

Sit haec: Si est A et est B; est et C. Negatur ergo fieri posse, ut simul sit A et B et non C. Asseritur ergo: Si A sit et non C; non etiam est B.

Et similiter in aliis ostendetur. Sumatur propositio: Omne triangulum aequicrus habet angulos ad basin

aequales. Negatur ergo ullum esse, quod aequicrus sit et angulos ad basin inaequales habeat: ergo quod inaequales habet, certe non est aequicrus.

Sumatur haec: Si duo triangula latera duo duobus, alterum alteri, aequalia habeant et angulum angulo aequalem, qui illis comprehenditur: basin quoque basi aequalem habebunt. Negatur ergo esse ulla duo talia, quae duo latera duobus et angulum angulo, qui illis comprehenditur, aequalia, et basin basi non aequalem habeant. Ergo 1o. quae duo latera duobus aequalia et basin basi non aequalem habent, nec angulum angulo, qui illis lateribus comprehenditur, aequalem habebunt. 2o. quae latus lateri aequale et angulum angulo, qui lateribus comprehenditur, aequalem, sed basim basi non aequalem habent: nec reliquum latus reliquo lateri aequale habebunt.

§. 318.

Hae ergo propositionum negativarum proprietates sunt: Omnis propositio negativa, si subjectum unum vel hypothesin habet unam, convertitur simpliciter: Si subjectum vel hypothesis pluribus constet partibus, praedicatum autem vel consequens simplex sit; pluribus modis convertetur, et fient tot aliae negativae, quot sunt dictae partes, harum singulas sumendo pro praedicato vel consequente; quod autem prius erat praedicatum vel consequens, in partem subjecti vel hypotheseos assumendo. Quodsi plura consequentia fuerint, de eorum unoquoque id fieri poterit. Quorum nonnulla adhuc exempla subjungimus.

Per demonstrationem El. I. 6ae. triangulum habens duos angulos aequales, non habet duo latera, quae

illos subtendunt, inaequalia. Ergo vicissim, triangulum, quod inaequalia habet duo latera, non habet angulos illis subtensos aequales.

Per El. III, 3. 4. duo circuli se invicem secantes vel contingentes, non habent centrum commune. Vicissim ergo: Duo circuli habentes centrum commune, non se invicem secabunt neque contingent.

Per El. III, 23. super eadem recta ad easdem ipsius partes non describi possunt duo diversa circulorum segmenta similia. Ergo vicissim, si duo diversa circulorum segmenta descripta fuerint super eadem recta ad easdem partes; ea non erunt similia.

Per El. I, 7. (juxta Simsoni enuntiationem non possunt super eadem recta ad easdem ipsius partes duo diversa triangula describi, habentia latera bina iisdem ejus rectae extremis terminata invicem aequalia. Vicissim ergo, si duo descripta sint habentia latus lateri aequale, quod uno illius rectae extremo terminatur: habebunt id, quod reliquo extremo terminatur, inaequale.

Per El. III, 4. duae in circulo rectae, quae non ambae per centrum transeunt, non se invicem bifariam secant. Ergo duae, quae se invicem bifariam secant, per centrum utraque transibunt. Et si neutra per centrum transit, una vero alteram bifariam secat; non ab hac rursus bifariam secabitur. Et si una per centrum transit, et alteram non transeuntem bifariam secat: non ab hac bifariam secabitur.

§. 319.

Et ut ad rem praesentem veniamus: quoniam per El. I, 4. duo triangula, quae et latus lateri, et alte-

rum latus alteri lateri, et angulum angulo, qui ab illis lateribus comprehenditur, aequalia habent (quae sunt tres partes, quibus constat hypothesis); habent etiam basin basi aequalem, et ipsa inter se aequalia sunt, et habent angulum angulo aequalem, qui priori latere subtenditur, itemque angulum angulo, qui posteriori latere subtenditur; quae sunt quatuor consequentia: si ad duas antecedentis partes positas assumatur unum consequentium tolli, tolletur et reliquum antecedens. Quocirca si duo triangula duo quidem latera duobus lateribus, alterum alteri, aequalia habeant; basin vero basi non habeant aequalem, aut ipsa triangula non sint aequalia, aut angulorum aequalibus lateribus subtensorum unum uni non aequalem habeant: nec angulus angulo aequalis erit is, qui aequalibus lateribus comprehenditur: etsi, uter horum major sit, nondum ex his quidem consequitur; postmodum autem in El. I., 24. docetur, majorem angulum esse ejus trianguli, cujus major sit basis. Rursus si duo triangula latus lateri aequale, et angulum angulo aequalem habuerint, qui binis lateribus comprehenditur, seu qui aequalibus lateribus adjacet; habeant autem aut basin basi inaequalem, aut aream areae inaequalem, aut angulum angulo inaequalem eum, qui aequalibus lateribus subtenditur, aut eum, qui reliquis duobus lateribus subtenditur; (hoc est; reliquum aequalibus lateribus adjacentem): habebunt et reliquum latus reliquo lateri inaequale. Et majus quidem esse in eo triangulo, quod aream habeat majorem, vel quod angulum reliquo latere subtensum majorem; ostensum est in Cap. VII. §. 292. 300. Majus etiam esse in eo,

quod habeat angulum uno aequalium laterum subtensum majorem, ostendi potest assumta in subsidium Elem. I., 16. (cf. Chrest. geom. p. 363. Satz 7. a.) In eo vero, quod basin basi majorem habet, ostendi non potest, quia re ipsa non consequitur: sed illud tum ut majus habeat reliquum latus, accidere potest, tum ut minus; modo non aequale. (Cf. Chrestom. geom. p. 362. Satz 4.)

§. 320.

His igitur praemissis nihil fere desiderabitur, quod ad demonstrationem eorum, quae hoc Capite proponemus, pertineat; cum illa conficiatur facillima et brevissima per indirectum argumentatione hunc in modum: Hoc huic non est aequale quia, si aequale foret, foret et per El. I, 4. aliud alii aequale, quod inaequale sumebatur.

Et cum generatim quidem negativas propositiones praebeat ex directis affirmativis ista contraria vel per contrapositionem conversio: quia tamen in his, in quibus nunc versamur, contradictoria habemus aequalitatem et inaequalitatem, ut negationi aequalitatis aequipolleat affirmatio inaequalitatis; ideo fieri poterit, ut plerisque sequentium propositionum pro forma negativa detur affirmativa. Afferentur tamen et aliquae negativae, in quibus illi permutationi non est locus.

§. 321.

Primum igitur repetamus ipsius El. I, 4*tae* contrarie conversas illas, de quibus vidimus §. 319.; quas si

enumeremus singulas, missis iis duabus, quae jam §. 292. 300. tractatae fuere, reliquae hae erunt:

1o. Si duo triangula duo latera duobus lateribus, alterum alteri, aequalia, basin autem basi inaequalem habeant: augulum quoque angulo, eum, qui a duobus lateribus comprehenditur, inaequalem habebunt.

Habeant triangula ABC, DEF duo latera BA, AC duobus lateribus ED, DF, alterum alteri, Fig. 131.
aequalia, BA quidem aequale ED, AC autem aequale DF; basin autem BC basi EF inaequalem: dico et angulum BAC angulo EDF inaequalem esse.

Si enim aequalis sit angulus BAC angulo EDF; quum et duo latera BA, AC duobus ED, DF aequalia sint: per El. I., 4. basis quoque BC basi EF aequalis foret: quae inaequalis est. Non ergo est angulus BAC angulo EDF aequalis: ergo inaequalis.

2o. Si duo triangula duo latera duobus lateribus, alterum alteri, aequalia habeant, ipsa autem inter se inaequalia sint: angulum quoque angulo inaequalem habebunt eum, qui ab aequalibus lateribus comprehenditur.

Habeant triangula ABC, DEF latus AB lateri DE, et latus AC lateri DF aequale; ipsa autem inaequalia sint: dico et angulum BAC angulo EDF inaequalem esse.

Ostenditur ut prius.

3o. Si duo triangula duo latera duobus lateribus, alterum alteri, aequalia habeant, angulum autem angulo inaequalem habeant, qui uno laterum aequalium subtenditur: eum quoque, qui lateribus aequalibus comprehenditur, angulum inaequalem habebunt.

Habeant triangula ABC, DEF latus AB lateri DE, et latus AC lateri DF aequale, angulum autem ABC angulo DEF inaequalem, qui subtenduntur lateribus aequalibus AC, DF: dico angulum quoque BAC angulo EDF inaequalem esse.

Ostenditur ut prius.

4o. Si duo triangula unum latus uni lateri aequale et angulum angulo, qui illi lateri adjacet, aequalem habeant; alterum autem latus alteri lateri inaequale habeant, id, quod singulos aequalium angulorum subtendit: reliquum quoque latus reliquo inaequale habebunt. Et hinc porro per §. 208. triangula ipsa erunt inaequalia, et reliquum angulum aequalibus lateribus adjacentem inaequalem habebunt.

Fig. 132, a. Habeant duo triangula ABC, DEF latus unum AB uni lateri DE aequale, et angulum BAC angulo EDF aequalem, qui illi lateri adjacet; alterum autem latus BC alteri lateri EF inaequale, quae subtendunt angulos aequales BAC, EDF: ea reliquum quoque latus AC reliquo lateri DF inaequale habebunt.

Si enim aequale esset latus AC lateri DF; cum et BA aequale sit ED, duo ergo BA, AC duobus ED, DF aequalia, ac praeterea angulus BAC angulo EDF aequalis: per El. I., 4. foret et basis BC basi EF aequalis; quod non est; inaequalis enim BC ipsi EF (supp.) Non ergo aequalis est AC ipsi DF; ergo inaequalis; q. e. d.

Et jam, cum sint binorum laterum BA, AC et ED, DF, aequales duos angulos BAC, EDF comprehendentium, unum BA uni ED aequale, alterum autem

tem AC alteri DF inaequale: per §. 208. erunt et triangula ABC, DEF inaequalia, et anguli inaequalibus lateribus oppositi ABC, DEF inaequales erunt: atque hi sunt reliqui aequalibus lateribus AB, DE adjacentes; ut enuntiatum est.

Potest et sic enuntiari: Si duo triangula latus lateri, et angulum angulo, qui basi opponitur, aequalia habeant, basim vero basi inaequalem: habebunt et reliquum latus reliquo inaequale, et ipsa triangula inaequalia erunt, et angulum angulo inaequalem habebunt eum, qui reliquo latere subtenditur.

5o. Si duo triangula latus lateri aequale, et angulum angulo unum quidem uni aequalem habeant, qui illi lateri adjacet, alterum autem alteri inaequalem, qui illi lateri opponitur: alterum quoque latus alteri lateri inaequale habebunt, quod singulis angulorum aequalium adjacet. Et hinc rursus per §. 208. ipsa triangula inaequalia erunt, et reliquum angulum reliquo inaequalem habebunt.

Habeant duo triangula ABC, DEF latus AB lateri DE aequale, et angulum BAC angulo EDF aequalem, qui illi lateri adjacet, sed angulum ACB angulo DFE inaequalem, qui illi lateri opponitur: alterum quoque latus AC alteri lateri DF inaequale habebunt, quae aequalibus angulis BAC, EDF adjacent.

Si enim aequale foret latus AC lateri DF: angulus quoque ACB angulo DFE aequalis esset per El. I., 4. Ergo inaequale est.

Et hinc rursus per §. 208. triangulum quoque ABC triangulo DEF inaequale erit, et reliquus angulus ABC reliquo DEF inaequalis, q. e. d.

§. 322.

Negativas propositiones ad eandem El. I., 4. pertinentes aliquot subjicimus. Tales hae erunt:

Duabus rectis inaequalibus non possunt, ut basibus, insistere duo triangula, habentia duo latera duobus lateribus, alterum alteri, aequalia, et angulum angulo aequalem, qui ab illis lateribus comprehenditur.

Intra duos angulos inaequales unum crus uni cruri aequale habentes, non possunt ex aequalium crurum terminis ad crura reliqua duci duae rectae, quae et inter se aequales et ad crura priora aequaliter inclinatae sint.

Huc et referri potest §. 86.

Datis duobus angulis aequalibus, et crure unius cruri alterius aequali, non poterunt e terminis crurum aequalium duci duae rectae, quae crurum quidem reliquorum segmenta aequalia abscindant, triangula autem inaequalia terminent.

Si recta terminata cum duobus angulis ipsi in extremis ejus ad easdem partes adjacentibus aequalis sit lateri alicujus trianguli cum duobus angulis ipsi adjacentibus: non poterit in uno extremorum prioris rectae extra vel intra adjacentem ipsi angulum recta duci, quae a crure opposito reliqui anguli abscindat rectam aequalem lateri trianguli angulum priori aequalem subtendenti.

§. 323.

Jam vero etiam ad propositiones duas Cap. VI. §. 240. 263. traditas, videamus de earum contrarie conversis; quae fiunt in locum unius ex partibus ante-

cedentis substituendo contrarium unius ex consequentibus; et hypothesi ita constitutae ut consequens subjungendo contrarium dictae partis antecedentis. Sed inter eas, quae hac ratione obtinebuntur, contrarie conversas reperientur tales, quae a propositionibus §. 208. 292. 300. 321. traditis, quarum prima (§. 208.) contraria, reliquae contrarie conversae sunt ipsius Elementorum *4tae*, sensu nihil differant: his itaque missis, reliquae hae erunt; quas quidem numeris sic distinguemus, ut iis series §. 321. enumerata continuetur. Ac primo ad §. 240.

60. Si duo triangula aequalis areae, latus lateri unum quidem uni aequale habeant, alterum vero alteri inaequale; angulum quoque angulo inaequalem habebunt eum, qui a dictis lateribus comprehenditur. Ac porro eum, qui inaequalibus lateribus subtenditur, inaequalem habebunt.

Habeant triangula A B C, D E F aream aequalem, et latus A B lateri D E aequale, A C vero ipsi D F inaequale: dico et angulum B A C angulo E D F, et angulum A B C angulo D E F inaequales essoe. *Fig. 132, b.*

Si enim angulus B A C angulo E D F aequalis esset: cum et latus A B lateri D E, et area areae aqualis sit; per §. 240. latus A C lateri D F aequale esset; quod non est: non ergo angulus B A C angulo E D F aequalis. Rursus si angulus A B C angulo D E F aequalis esset: cum et latus A B lateri D E, et area areae aqualis sit; per §. 240. basis quoque A C basi D F aequalis esset; quod non est: non ergo angulus A B C angulo D E F aequalis. Ostensum est ergo, et angu-

lum B A C angulo E D F, et angulum A B C angulo D E F inaequalem esse, q. e. d.

7o. Si duo triangula aequalis areae latus lateri aequale habeant, angulum autem angulo inaequalem, qui illi lateri adjacet; reliquum quoque angulum adjacentem inaequalem habebunt.

Triangula A B C, D E F area aequalia, latus A B lateri D E aequale, angulum autem adjacentem B A C angulo E D F inaequalem habeant: angulum quoque A B C angulo D E F inaequalem habebunt.

Si enim angulus A B C angulo D E F aequalis esset, cum et latus A B lateri D E, et triangulum triangulo aequale sit; per §. 240. angulus quoque B A C angulo E D F aequalis esset; quod non est. Ergo inaequalis est angulus B A C angulo E D F.

8o. Si duo triangula aequalia latus lateri aequale habeant, angulum autem angulo inaequalem, qui illi lateri opponitur: angulos quoque, qui illi lateri adjacent, utrumque utrique inaequalem habebunt.

Triangula A B C, D E F aequalia habeant latus A B lateri D E aequale, angulum autem oppositum B A C angulo D F E inaequalem: erunt et anguli B A C, A B C angulis E D F, D E F uterque utrique inaequales.

Si enim angulus B A C angulo E D F aequalis esset; cum et latus A B lateri D E, et triangulum triangulo aequale sit; per §. 240. angulus quoque A C B angulo D F E aequalis esset; quod non est. Inaequalis ergo est angulus B A C angulo E D F. Et similiter angulo D E F inaequalis ostendetur; et pariter angulus A B C utrique E D F et D E F.

9o. Si duo triangula aequalia angulum angulo aequalem habeant, laterum autem illum angulum compre-

hendentium unum uno majus; reliquum reliquo minus habebunt.

Triangula A B C, D E F aequalia angulum B A C angulo E D F aequalem habeant, latus autem A B latere D E majus: latus A C latere D F minus habebunt.

A majori A B abscindatur A G aequalis minori D E, et jungatur G C. Quoniam triangulum D E F triangulo A B C aequale est, majus erit triangulo A G C. Habet autem latus D E lateri A G aequale, et angulum E D F angulo G A C aequalem: ergo per §. 292. latus D F majus erit latere A C. q. e. d. *Fig. 133.*

10o. Si duo triangula aequalia angulum angulo aequalem habeant, latus autem lateri inaequale, quod illi angulo opponitur: reliquorum laterum utrumque utrique inaequale habebunt.

Triangula A B C, D E F aequalia angulum B A C angulo E D F aequalem habeant, latus autem oppositum B C inaequale lateri E F: reliquorum laterum B A, A C et E D, D F utrumque utrique inaequale erit. *Fig. 132, b.*

Si enim latus A B lateri D E aequale esset: cum angulus B A C angulo E D F, et area areae aequalis sit; per §. 240. latus quoque B C lateri E F aequale esset; quod non est. Inaequale ergo est latus A B lateri E D; similiterque etiam lateri D F inaequale ostenditur: et pariter latus A C utrique D E, D F inaequale.

11o. Si duo triangula aequalia angulum angulo aequalem habeant, sed alterum angulum alteri inaequalem: laterum, quae aequales angulos comprehendunt, utrumque utrique inaequale habebunt.

Triangula A B C, D E F aequalia angulum B A C angulo E D F aequalem habeant, angulum autem A B C angulo D E F inaequalem: laterum aequales angulos comprehendentium B A, A C et E D, D F utrumque utrique inaequale habebunt.

Si enim latus A B lateri D E aequale esset: cum et angulus B A C angulo E D F et triangulum triangulo aequale sit; per §. 240. angulus quoque A B C angulo D E F aequalis esset; quod non est. Inaequale ergo est latus A B lateri D E. Et similiter lateri D F inaequale ostenditur: et pariter latus A C utrique D E, D F inaequale.

Et ad §. 263. hae reperientur reliquae:

12o. Si duo triangula duos angulos duobus angulis, alterum alteri, aequales habeant, latus autem uni ipsorum oppositum inaequale: id quoque quod aequalibus angulis adjacet, inaequale habebunt.

Triangula A B C, D E F angulum B A C angulo E D F et angulum A B C angulo D E F aequales habeant, latus autem B C lateri E F inaequale: latus quoque A B lateri D E inaequale habebunt.

Si enim aequale esset latus A B lateri D E: cum et angulus B A C angulo E D F, et angulus A B C angulo D E F aequales sint; per §. 263. latus quoque B C lateri E F aequale esset; quod non est. Inaequale igitur est latus A B lateri D E.

13o. Si duo triangula duos angulos duobus angulis, alterum alteri, aequales habeant, ipsa autem inter se inaequalia sint: latus quoque lateri id, quod aequalibus angulis adjacet, inaequale habebunt.

Triangula A B C, D E F angulum B A C angulo E D F, et angulum A B C angulo D E F aequales ha-

beant, ipsa autem inter se inaequalia sint: latus quoque A B lateri D E inaequale habebunt.

Si enim aequale esset latus A B lateri D E: cum et anguli adjacentes B A C, A B C angulis E D F, D E F, alter alteri, aequales sint; triangulum quoque A B C triangulo D E F aequale esset, §. 263; quod non est. Inaequale ergo est latus A B lateri D E.

§. 324.

Habemus ergo theoremata omnino 16, primum quidem Cap. V. §. 208, secundum et tertium Cap. VII. §. 292 et 300; tum quinque paullo ante §. 321, et octo §. 323. hujus Cap. tradita; de binis triangulis habentibus duo elementa aequalia, tertium inaequale; quibus consequens sit alius alicujus elementi vel etiam plurium inaequalitas: eaque inaequalitas partim determinata fuit, ut diceretur, utrum altero majus esset, ut in §. 208. 292. 300. et in no. 9. §. 323: partim indeterminata, ut in reliquis: idque in aliis propter ipsam rei naturam, quod determinatio revera locum non habeat; in aliis autem propter solam methodum, quod, etsi illa locum habeat, tamen, cum ad demonstrationem posteriorum propositionum usu indigeat (nominatim El. I, 16*ae* vel 26*ae*, part. 2*dae*), hic quidem, ubi non de aliis, quam quae ex El. I, 4*ta* proxime deducuntur, agimus, demonstrari non possit. Et trium quidem primorum ex illis theorematis (§. 208. 292. 300.) applicationes in Cap. V. et Cap. VII. bene multas dedimus: sequitur nunc, ut reliquorum quoque tredecim (§. 321. 323.) aliquas persequamur. Atque in hoc rursus sequemur ordinem figurarum Quaestionibus I — VI. Capitis II. respondentium.

§. 325.

Ad figuram igitur Quaest. I. Cas. I. et Quaest. II. sequentia habebimus eorum, quae illic, theorematum contrarie conversa: quae numeris sic distinguemus, ut respondeant numeris eorum in §. §. 321 et 323., ex quibus consequuntur.

1*a*. Si e vertice trianguli aequicruris ad basim ducta recta, ipsam secet in inaequalia: ea angulum quoque ad verticem in inaequalia dividet.

1*b*. Si in triangulo habente duo latera inaequalia, recta e vertice ducta basin bifariam secet: ea basi sub angulis deinceps inaequalibus seu obliquis insistet.

2*o*. Si triangulum aequicrus recta e vertice ad basin ducta dividatur in inaequalia: eadem recta angulus quoque, qui est ad verticem, in inaequalia dividetur.

3*a*. Si recta e vertice trianguli aequicruris ad basin ducta, obliquis basi insistat angulis: ea angulum ad verticem in inaequalia dividet.

3*b*. Si recta trianguli basin bifariam, angulum vero ad verticem in inaequalia secet: ea basi obliquis angulis insistet.

3*c*. Si in triangulo habente angulos ad basin inaequales, recta e vertice ducta basin bifariam secet: ea basi oblique insistet.

4*a*. Si recta trianguli angulum ad verticem bifariam, basin autem in inaequalia secet: inaequalia erunt ejus latera, et recta illa basi oblique insistet, et trianguli aream inaequaliter dividet.

4*b*. Si in triangulo latera habente inaequalia, recta e vertice ad basin perpendicularis ducta sit: ea basin,

et angulum ad verticem, et ipsum triangulum in inaequalia dividet.

5a. Si in triangulo habente angulos ad basin inaequales recta ad basin ducta sit secans angulum ad verticem bifariam: inaequalia erunt duo trianguli latera, et recta illa basi oblique insistet, et triangulum in inaequalia dividet.

5b. Si in triangulo habente angulos ad basin inaequales, recta e vertice ad basin perpendicularis ducta sit: ea basin et angulum ad verticem, et ipsum triangulum in inaequalia dividet.

6c. Si triangulum inaequalia habens duo latera, bifariam dividat recta e vertice ad basin ducta: ea basi oblique insistet, et angulum quoque ad verticem in inaequalia secabit.

7a. Si e vertice trianguli ad basim ducta recta ipsum quidem triangulum bifariam, angulum vero ad verticem in inaequales secet: ea basi ad obliquos angulos insistet.

7b. Si triangulum bifariam divisum sit recta e vertice ad basim sub obliquis angulis ducta: ea angulum ad verticem in inaequales dividet.

8c. Si triangulum habens angulos ad basim inaequales, bifariam dividat recta e vertice ad basim ducta: ea et angulum ad verticem in inaequales secabit, et basi obliqua insistet.

§. 326.

Ad figuram Quaest. I. Cas. II. et III. haec habebimus:

1a. Si e terminis rectarum aequalium angulum comprehendentium ad punctum intra illum angulum

sumtum ductae duae rectae aequales sint: recta hoc punctum cum anguli vertice jungens ipsum angulum inaequales dividet.

Vel: Si in quadrilatero duo circa unum angulum latera sint aequalia, duo reliqua inaequalia: diagonalis per dictum angulum transiens illum in inaequales dividet.

Vel: Si e puncto intra angulum sumto ductae ad ejus crura duae rectae inter se aequales sint, inaequalia autem crurum segmenta abscindant: eae cum recta punctum illud cum anguli vertice jungente inaequales angulos facient.

2o. Si quadrilaterum habens duo circa unum angulum latera aequalia, diagonali per illum angulum transeunte in inaequalia divisum sit: angulus quoque ille in inaequales divisus erit.

3a. Si quadrilaterum duo quidem circa unum angulum latera aequalia, ex reliquis vero angulis duos sibi invicem oppositos inaequales habuerit: prior angulus diagonali per ipsum transeunte in inaequales dividetur.

3b. Si quadrilaterum duo circa unum angulum latera aequalia habeat, angulum vero illi oppositum diagonalis per utrumque transiens secet in inaequales: priorem quoque angulum in inaequales secabit.

4o. Si quadrilaterum habeat angulum diagonali divisum bifariam, duo vero, quae angulum illi oppositum comprehendunt, latera inter se inaequalia: reliqua quoque duo latera inter se inaequalia habebit, et posterior angulus atque ipsum quadrilaterum eadem diagonali in inaequalia dividentur.

5o. Si quadrilaterum habeat angulum diagonali divisum bifariam, ex reliquis vero angulis duos sibi invicem oppositos inaequales: duo circa angulum priorem latera inaequalia habebit, et qui ipsi opponitur, angulus ac totum quadrilaterum illa diagonali in inaequalia divisa erunt.

6o. Si quadrilaterum habens duo latera circa unum angulum inaequalia, bifariam divisum sit diagonali per dictum angulum transeunte: eadem et dictus angulus, et qui ipsi opponitur, in inaequales divisi erunt.

7o. Si diagonalis quadrilaterum quidem ipsum in aequalia, unum autem angulorum, per quos transit, in inaequales diviserit: reliquum quoque illorum angulorum in inaequales dividet.

8o. Si quadrilaterum habens duos angulos oppositos inaequales bifariam sectum sit diagonali per duos reliquos angulos transeunte: uterque posteriorum in inaequales sectus erit, quorum praeterea bini alterni inaequales erunt.

§. 327.

Ad figuram Quaest. IV. Cap. II. haec:

1o. Si quadrilateri opposita latera duo quidem aequalia sint, duo reliqua vero inaequalia: diagonalis utraque cum oppositis lateribus aequalibus faciet angulos inaequales.

2o. Si quadrilaterum habens duo latera opposita aequalia, diagonali dividatur in inaequalia: ea cum aequalibus lateribus inaequales faciet angulos.

3a. Si quadrilaterum duo latera opposita aequalia habeat, duos vero angulos oppositos inaequales: utraque diagonalis cum lateribus aequalibus faciet angulos inaequales.

3b. Si quadrilaterum duo latera opposita habeat aequalia, diagonalis vero angulos cum reliquis duobus lateribus faciat inaequales: cum prioribus quoque duobus inaequales angulos faciet.

4o. Si quadrilateri diagonalis cum duobus oppositis lateribus faciat angulos aequales, reliqua vero duo latera inaequalia sint: priora quoque duo inaequalia erunt, et diagonalis cum posterioribus duobus inaequales angulos faciet; et quadrilaterum in inaequalia dividet.

5o. Si quadrilateri diagonalis cum duobus oppositis lateribus faciat angulos aequales; anguli vero quadrilateri, per quos ea non transit, inaequales sint: dicta duo latera inaequalia erunt, et diagonalis cum reliquis duobus lateribus inaequales faciet angulos, et quadrilaterum in inaequalia dividet.

6o. Si quadrilaterum habens duo opposita latera inaequalia, bifariam dividatur diagonali: ea cum utrisque binorum laterum oppositorum inaequales angulos faciet.

7o. Si diagonalis quadrilaterum bifariam secet, cum duobus autem angulis oppositis faciat angulos inaequales: cum reliquis quoque duobus faciet inaequales angulos.

§. 328.

Ad figuram Quaest. V. Cap. II. haec:

1a. Si quadrilaterum habeat duo latera opposita

aequalia, diagonales autem inaequales: inaequales habebit binos utrivis reliquorum laterum adjacentes angulos.

1b. Si quadrilaterum diagonales duas aequales habeat, duo vero latera opposita inaequalia: diagonales cum utrovis duorum reliquorum laterum facient angulos inaequales.

2a. Si quadrilateri duo latera opposita sint aequalia, inaequalia autem habeant triangula super basi sibi adjacentia: inaequales cum basi, ut et cum latere basi opposito, facient angulos.

2b. Si quadrilateri duae diagonales sint aequales, inaequalia autem habeant triangula super basi sibi adjacentia: inaequales cum basi, ut et cum latere basi opposito, facient angulos.

3a. Si quadrilateri duo latera opposita aequalia sint, angulos autem cum duobus diagonalibus inaequales faciant in duobus extremis lateris basi oppositi: cum basi quoque inaequales facient angulos.

3b. Si quadrilateri duae diagonales aequales sint, inaequales autem cum duobus lateribus basi insistentibus faciant angulos in duobus extremis lateris basi oppositi: cum basi quoque inaequales facient angulos.

3c. Si quadrilateri duo latera opposita aequalia sint, duae autem diagonales faciant inaequales cum basi angulos: duo quoque aequalia latera inaequales cum basi facient angulos.

3d. Si quadrilateri duae diagonales aequales sint, duo autem latera opposita faciant inaequales cum basi angulos: duae quoque diagonales facient inaequales cum basi angulos.

4a. Si quadrilateri duo latera opposita faciant aequales cum basi angulos, diagonales autem sint inaequales: erunt dicta latera inaequalia, et anguli, quos diagonales cum basi faciunt, inaequales, et triangula dictis lateribus et diagonalibus super basi comprehensa inaequalia.

4b. Si quadrilateri duae diagonales faciant aequales cum basi angulos, opposita autem latera ipsi insistant inaequalia: erunt diagonales inaequales, et anguli quadrilateri ad basin inaequales, et triangula dictis diagonalibus et lateribus super basi comprehensa inaequalia.

5a. Si quadrilateri duo ad basin anguli aequales sint, inaequales autem anguli in lateris basi oppositi extremis ii, quos duo latera basi insistentia cum duabus diagonalibus faciunt: erunt etiam duo latera inaequalia, et anguli, quos diagonales cum basi faciunt, inaequales, et triangula duo basi insistentia inaequalia.

5b. Si quadrilateri duae diagonales faciant aequales quidem cum basi angulos, inaequales autem cum duobus lateribus basi insistentibus in duobus extremis lateris basi oppositi: ipsae diagonales erunt inaequales, et duo quadrilateri anguli ad basin inaequales, et triangula duo basi insistentia inaequalia.

6a. Si quadrilateri duo latera opposita inaequalia sint, aequalia autem ipsis adjaceant triangula basi insistentia: erunt duo quadrilateri anguli ad basin inaequales, et anguli, quos diagonales cum basi faciunt, inaequales.

6b. Si quadrilateri duae diagonales inaequales sint, aequalia autem ipsis adjaceant triangula basi insistentia: erunt et duo quadrilateri anguli ad basin inae-

quales et anguli, quos diagonales cum basi faciunt, inaequales.

7*a*. Si quadrilateri duo ad basin anguli inaequales sint, aequalia autem duabus diagonalibus adjaceant super basi triangula: diagonales cum basi inaequales facient angulos.

7*b*. Si quadrilateri diagonales inaequales ad basin faciant angulos, aequalia autem ipsis adjaceant triangula super basi: duo quadrilateri anguli ad basin inaequales erunt.

8*a*. Si quadrilateri latera duo opposita cum duabus diagonalibus aequalia quidem comprehendant super basi triangula; inaequales autem angulos in extremis lateris basi oppositi: tam dicta duo latera, quam duae diagonales inaequales cum basi facient angulos.

§. 329.

Ad figuram Quaest. VI. Cap. II. haec (servamus autem in his distinguendis etiamnum numerorum ordinem convenientem ei, qui fuit in §§. 321. 323. sic, ut, quibus iidem sint numeri praefixi, simili ratione demonstrentur, vel haec ex illis consequantur.)

4*o*. Si eundem angulum subtendentes duae rectae abscindant segmentum unius cruris segmento alterius cruris aequale, ipsae autem inter se sint inaequales: eae alternorum crurum segmentum segmento inaequale abscindent, et ad priora segmenta, quae aequalia sunt, inaequalibus inclinabuntur angulis internis, et inaequalia terminabunt triangula.

5*o*. Si angulum eundem subtendentes duae rectae abscindant segmentum unius cruris segmento alterius

aequale, inaequali autem inclinentur ad alterna crura angulo interno: horum segmentum segmento inaequale abscindent, et ad priora quoque segmenta inaequalibus inclinabuntur angulis, et triangula terminabunt inaequalia.

9o. Si triangula duo circa communem angulum jacentia aequalia sint, et unum eorum habeat unum latus circa angulum communem majus uno latere alterius: reliquum latus reliquo minus habebit.

10o. Si triangula duo circa communem angulum jacentia aequalia sint, et habeant basim, quae illum angulum subtendit, basi inaequalem: laterum circa communem angulum sitorum utrumque utrique inaequale habebunt.

11o. Si triangula duo circa communem angulum jacentia aequalia sint, et reliquorum angulorum unum uni inaequalem habeant: laterum quoque circa communem angulum sitorum utrumque utrique inaequale habebunt.

12a. Si ex terminis inaequalium anguli crurum ad alterna crura duae rectae ductae sint sub angulis, quos cum his faciunt, aequalibus: horum quoque crurum inaequalia segmenta abscindent.

12b. Si angulum aliquem subtendant duae rectae inaequales quidem, facientes autem angulum angulo aequalem internum, quem altera cum altero crure facit: ex segmentis crurum unum uni inaequale erit, quod illis aequalibus angulis adjacet.

13o. Si intra angulum ductae duae rectae, facientes angulum angulo aequalem, quem altera cum altero crure facit, internum, inaequalia terminent triangula:

gula: ex segmentis crurum unum uni inaequale erit, quod illis aequalibus angulis adjacet.

Paullo aliter sic enuntiabuntur proposita sub No. 4o. 5o.:

Si a duabus rectis angulum comprehendentibus abscissa inde ab illius vertice sint segmenta aequalia, et ab horum extremis intra illum angulum ad rectas illas alternas ductae rectae vel inaequales sint inter se, vel angulos cum ipsis faciant inaequales; eae segmenta harum abscindent inaequalia, et triangula terminabunt inaequalia, et ad segmenta abscissa aequalia inaequaliter inclinatae erunt.

§. 330.

Rursus aliquot negativas subjungimus:

Propositio: Rectae eidem in uno extremo terminatae ad easdem ipsius partes non possunt insistere duo triangula basin quidem habentia in illa recta sitam et dicto extremo adjacentem, latus autem lateri aequale, tam quod dicto extremo adjacet, quam reliquum reliquo, et angulum angulo aequalem, qui ab illis lateribus comprehenditur.

Casus habet duos: quorum prior est, ut sit eadem basis, segmentum unum dicto extremo adjacens: alter, ut diversae bases sint, segmenta duo dicto extremo adjacentia.

Cas. I. separatim sic enuntiabitur: Rectae eidem terminatae non possunt ut basi insistere ad easdem partes duo triangula, quae habeant latera iisdem illius extremis adjacentia, alterum alteri, aequalia, et angulum angulo aequalem, qui illis comprehenditur.

Sint enim, si fieri potest, duo triangula
Fig. 134. A B C, D B C eidem basi B C ad easdem partes insistentia, quae habeant latera B A, A C lateribus B D, D C, alterum alteri, aequalia, et angulum B A C angulo B D C aequalem. Et per El. prop. 4. erit angulus A B C angulo D B C aequalis, totum et pars, quod fieri nequit. Non ergo fieri potest, ut eidem basi insistant duo triangula sub dictis conditionibus.

Cas. II. consequitur ex eo, quod jam supra §. 322. fuit indicatum: Duabus rectis inaequalibus non possunt ut basibus etc. Sed propositio pro hoc Casu aliquanto generalius sic exprimetur:

Si in basi trianguli sumatur segmentum, vel uno basis extremo et puncto intermedio in ipsa sumto, vel duobus punctis intermediis in ipsa sumtis interceptum: non potest illi segmento, ut basi, ad easdem cum triangulo aut diversas partes, insistere aliud triangulum habens latera sua lateribus prioris, alterum alteri, aequalia, et angulum ad verticem angulo prioris ad verticem aequalem.

In trianguli A B C basi B C sumatur segmen-
Fig. 135.a.b. tum interceptum aut basis extremo et puncto intermedio in ipsa sumto, ut B E; aut duobus punctis intermediis in ipsa sumtis, ut D E: Dico non posse illi segmento ut basi, ad easdem cum triangulo aut diversas partes insistere triangulum aliud B F E vel D F E, habens latera sua lateribus B A, A C, alterum alteri, aequalia; et angulum ad verticem F angulo ad verticem A aequalem.

Foret enim per El. prop. 4. etiam basis B E vel D E basi B C aequalis, pars toti; quod fieri nequit.

§. 331.

Huc et referri possunt propositiones rursus aliquot de rectis lineis in idem punctum incidentibus: quarum prima sit haec: (ad fig. Quaest. I. Cap. II.)

Propositio I. Si e duobus punctis ad diversas partes rectae lineae una ex parte terminatae sitis ad punctum ejus extremum ductae sint duae rectae aequales, et ex iisdem punctis ad eandem rectam ductae sint aliae duae rectae inter se aequales et comprehendentes aequalem cum prioribus angulum: hae in idem aliquod prioris rectae punctum incident.

Sit recta B E in puncto B terminata, et ex duobus punctis A, D ad diversas illius partes sitis ad punctum B ductae sint rectae A B, D B aequales; et ex iisdem punctis A, D ad eandem rectam B E ductae sint aliae duae rectae inter se aequales, et cum prioribus A B D B comprehendentes angulum aequalem: dico eas in idem aliquod rectae B E punctum incidere. *Fig. 136.*

Non enim ita sit, sed incidant in diversa puncta, ex A quidem ducta in C; ex D vero ducta in E; ita quidem, ut rectae A C, D E aequales sint, et faciant angulos B A C, B D E aequales. Et erunt per El. prop. 4., quia duae B A, A C duabus B D, D E, et angulus B A C angulo B D E aequales sunt, bases quoque B C, B E aequales, totum et pars; quod fieri nequit. Non ergo in diversa puncta incident rectae ex A, D ductae; ergo in idem punctum, q. e. d.

Aliter idem sic enuntiabitur: Si ad duas rectas aequales (A B, B D) angulum facientes, in earum extremis (A, D) constituantur rectae inter se aequales

et sub angulis inter se aequalibus (B A C, B D E), quae in eadem recta (B E) intra priorem angulum (A B D) et per ejus verticem (B) ducta terminentur: in eodem ejus puncto terminabuntur.

§. 332.

Propositio (ad fig. Quaest. IV. Cap. II.) Si ad lineae rectae extremum, quo ea una ex parte terminata est, e duobus punctis extra ipsam, sive ad easdem sive ad diversas partes sumtis, ductae sint duae rectae, et ex iisdem punctis ad eandem rectam ductae sint duae aliae rectae aequales prioribus ex alternis punctis ductis, et angulum angulo aequalem facientes, quem cum prioribus faciunt: hae in unum aliquod rectae initio dictae punctum incident.

Sit recta B E in B terminata, et ex punctis A, D extra ipsam sive ad easdem sive ad diversas ipsius partes B sumtis, ductae sint ad extremum B duae rectae A B, D B; et ex iisdem punctis A, D ad eandem rectam B E ductae sint aliae duae, ea quidem, quae ex A, aequalis priori ex D ductae D B; ea vero quae ex D, aequalis priori ex A ductae A B; et facientes cum prioribus A B, D B angulum angulo aequalem: dico eas, in idem aliquod rectae B E punctum incidere.

Fig. 137.

Non enim, si fieri potest; sed in diversa puncta incidant; quae ex A quidem, in punctum C; quae vero ex D, in punctum E; ita ut A C sit aequalis D B, et D E aequalis A B, angulus autem B A C angulo B D E. Et. per Et. prop. 4. erit et basis B C aequalis basi B E, pars et totum; quod fieri nequit.

Non ergo in diversa puncta incident, ergo in idem punctum; q. e. d.

Aliter sic enuntiabitur: Si ad duas rectas (A B, B D) angulum facientes (A B D), in earum extremis (A, D) constituantur rectae prioribus rectis alternis aequales, (quae in D, aequalis ipsi A B; quae in A, aequalis ipsi B D), et sub aequalibus invicem angulis; quae in eadem aliqua recta (B E) sive intra sive extra priorem angulum (F B D) et per ejus verticem (B) ducta terminentur: in eodem ejus puncto terminabuntur.

Sub hac contenta est etiam sequens, respondens Quaest. V. Cap. II.: Si in uno basis (B C) trianguli (A B C) extremo (C) insistat recta (D) aequalis lateri (A B) alteri extremo (A) adjacenti, et ad ipsam (C D) in ipsius termino (D) ducta recta reliquo lateri (A C) aequalis et sub angulo (C D E) aequali ei (B A C), quem dicta duo latera comprehendunt, extremo suo tangat rectam lineam, in qua est basis (B C): eam in ipso puncto (B), in quo est alterum basis extremum, tanget. *Fig. 138.*

§. 333.

Nunc ut ea, quae §. §. 321. 323. tradita sunt, ad nonnulla eorum quoque, quae Cap. VI. pertractata sunt, applicemus: sumamus statim Theorematis I*mi* in illo Capite Cas. II. et III: ad quos haec habebimus contrarie conversa (usurpamus autem rursus numeros illis, qui in §. §. 321. 323. respondentes):

1*a*. Si rectae lineae in ipsius extremis et ad easdem aut diversas partes insistant duae rectae aequa-

les; ex harum autem terminis ad punctum, in quo prior recta bifariam secta est, ductae rectae inaequales sint: insistentes illae sub inaequalibus angulis insistent.

1b. Si e puncto, in quo recta bifariam secta est, duae aequales rectae (sive ad easdem, sive ad diversas partes: quod in sequentibus non expresse repetentes, subaudiendum relinquemus) eductae sint, ex ipsarum autem terminis ad extrema prioris rectae ductae rectae inaequales sint: duae eductae facient inaequales cum prioris rectae segmentis angulos.

1c. Si ad rectae alicujus extrema e duobus punctis extra ipsam sumtis, ex altero quidem ad alterum extremum, ductae duae rectae aequales sint, et ex iisdem ad punctum aliquod prioris rectae intermedium ductae duae rectae aequales ipsam in inaequalia secent: erit et angulus angulo inaequalis, qui sumtis punctis adjacet a binis ductis comprehensus.

2a. Si in alicujus rectae terminatae extremis insistant duae rectae aequales, ex earum autem terminis ad punctum bisectionis prioris ductae duae rectae inaequalia faciant triangula; insistentes illae sub inaequalibus angulis insistent.

2b. Si e puncto, in quo recta bifariam secta est, duae aequales rectae eductae sint, ex ipsarum autem terminis ad extrema prioris rectae ductae duae rectae inaequalia faciant triangula: duae eductae inaequales facient cum priori recta angulos.

2c. Si e duobus punctis extra aliquam rectam sumtis ad ejus extrema, ex altero quidem ad alterum, ductae duae rectae aequales, et ex iisdem ad punctum aliquod in ipsa intermedium ductae item duae rec-

tae aequales, inaequalia comprehendant triangula segmentis prioris rectae factis insistentia: erit et angulus angulo inaequalis, qui ad sumta duo puncta a binis ductis comprehenditur.

3a. Si rectae alicui in ipsius extremis insistant duae rectae aequales, ex harum autem terminis ad punctum bisectionis prioris rectae, ductae duae rectae faciant inaequales cum insistentibus angulos: insistentes etiam cum priori recta inaequales angulos facient.

3b. Si rectae alicui in ipsius extremis insistant duae rectae aequales, ex harum autem terminis ad punctum, in quo prior bifariam secatur, ductae duae rectae cum priori faciant inaequales angulos: insistentes etiam cum priori recta inaequales angulos facient.

3c. Si e puncto, in quo recta bifariam secta est, duae aequales rectae eductae sint; ex ipsarum autem terminis ad prioris extrema ductae duae rectae faciant inaequales cum eductis angulos: eductae etiam cum segmentis prioris inaequales angulos facient.

3d. Si e puncto, in quo recta bifariam secta est, duae aequales rectae eductae sint; ex ipsarum autem terminis ad prioris extrema ductae duae rectae faciant inaequales cum priori recta angulos: eductae quoque cum ipsius segmentis facient angulos inaequales.

3e. Si e duobus punctis extra aliquam rectam sumtis, ad ejus extrema, ex altero quidem ad alterum, ductae duae rectae aequales sint, inaequalibus autem angulis ad ipsam inclinatae; et ex iisdem ad punctum aliquod in ipsa intermedium ductae duae rectae aequales sint: inaequales erunt anguli, qui ad sumta duo puncta consistunt binis ductis comprehensi.

3f. Si e duobus punctis extra aliquam rectam sumtis ad ejus extrema, ex altero quidem puncto ad alterum extremum, ductae duae rectae aequales sint; et ex iisdem ad punctum aliquod in ipsa intermedium ductae duae rectae aequales quidem sint, sed inaequalibus ad ipsam angulis inclinatae: inaequales erunt anguli, qui ad sumta duo puncta consistunt binis ductis comprehensi.

4a. Si rectae alicui in ipsius extremis insistant duae rectae sub angulis aequalibus, et ex harum terminis ad punctum, in quo illa bifariam secta est, ductae duae rectae inaequales sint: erunt et insistentes inaequales, et eae, quae ad punctum bisectionis ductae sunt, facient inaequales cum segmentis prioris angulos, et triangula super his segmentis consistentia inaequalia erunt.

4b. Si e puncto, in quo recta bifariam secta est, duae rectae eductae sint sub angulis, quos altera cum altero segmento facit, aequalibus; quae autem cujusque ipsarum terminum cum extremo segmenti respondentis jungunt rectae, inaequales sint: eductae quoque inter se inaequales erunt, et in extremis insistentes sub inaequalibus angulis insistent, et triangula super segmentis consistentia inaequalia erunt.

4c Si rectae alicui in ipsius extremis insistant duae rectae aequales et sub angulis aequalibus; quae vero ex earum terminis ad punctum aliquod prioris rectae intermedium ducuntur duae rectae, inaequales sint: rectam priorem in illo puncto in inaequalia secabunt, et cum insistentibus inaequales facient angulos, et triangula super segmentis consistentia inaequalia erunt.

4d. Si rectae alicui in ipsius extremis insistant duae rectae aequales; et quae ex ipsarum terminis ad punctum aliquod prioris rectae intermedium ducuntur duae rectae, faciant quidem aequales cum insistentibus angulos, priorem autem rectam in inaequalia in illo puncto secent: eae inter se inaequales erunt, et insistentes cum prioris rectae segmentis inaequales facient angulos, et triangula super his segmentis consistentia inaequalia erunt.

4e. Si e puncto intermedio in recta aliqua sumto eductae sint duae rectae aequales sub angulis, quos altera cum altero segmento facit, aequalibus; quae vero ab ipsarum terminis ad respondentium segmentorum extrema ducuntur rectae, inaequales sint: prior recta in puncto illo intermedio in inaequalia secta erit, et anguli duobus segmentis oppositi inaequales erunt, et triangula super ipsis inaequalia.

4f. Si e puncto, in quo recta aliqua in inaequalia secta est, eductae sint duae rectae aequales, et faciant cum rectis ab ipsarum terminis ad respondentium segmentorum extrema ductis aequales angulos: hae posteriores ductae inter se inaequales erunt, et priores eductae cum segmentis respondentibus inaequales facient angulos, et triangula super duobus segmentis constituta inaequalia erunt.

5a. Si rectae alicui in ipsius extremis insistant duae rectae aequales et sub angulis aequalibus; quae autem ex ipsarum terminis ad punctum aliquod prioris rectae intermedium ducuntur rectae, faciant inaequales, altera cum altero segmento, angulos: eaedem cum duabus insistentibus inaequales angulos facient, et prior

recta in illo puncto intermedio in inaequalia secta erit, et triangula super duobus segmentis inaequalia erunt.

5b. Si rectae alicui in ipsius extremis insistant duae rectae aequales; et quae ab ipsarum terminis ad punctum aliquod prioris intermedium ducuntur rectae, cum insistentibus quidem faciant aequales angulos, cum segmentis autem prioris rectae inaequales: ductae illae inaequales erunt, et anguli, quos insistentes cum segmentis faciunt, inaequales, et triangula super ipsis inaequalia.

5c. Si rectae alicui in ipsius terminis insistant duae rectae sub aequalibus angulis, et ex earum terminis ad punctum, in quo prior recta bifariam secta est, ductae duae rectae faciant cum insistentibus angulos inaequales: eae cum segmentis quoque prioris inaequales angulos facient, et insistentes inter se inaequales erunt, et triangula super segmentis inaequalia erunt.

5d. Si e puncto, in quo recta bifariam secta est, eductae sint duae rectae sub angulis aequalibus, quos altera cum altero segmento facit; ab ipsarum terminis ad respondentium segmentorum extrema ductae rectae faciant inaequales cum prioribus eductis angulos: hae cum priori quoque recta inaequales angulos facient; et duae eductae inter se inaequales erunt, et triangula super duobus segmentis consistentia inaequalia erunt.

5e. Si e puncto in aliqua recta terminata sumto intermedio duae rectae aequales eductae sint sub angulis, quos altera cum altero segmento faciunt, aequalibus; ductae autem ex ipsarum terminis ad respondentium segmentorum extrema duae rectae faciant inae-

quales cum illis segmentis angulos: eae cum prioribus quoque eductis facient angulos inaequales, et rectae prioris segmenta inaequalia erunt, et inaequalia super ipsis triangula.

5f. Si e puncto intermedio in recta aliqua terminata sumto eductae sint duae rectae aequales; quae autem ab ipsarum terminis ad extrema prioris rectae ducuntur rectae, faciant aequales quidem cum eductis angulos, cum priori autem recta inaequales: hae posteriores ductae ipsae inter se inaequales erunt; eductae autem cum rectae prioris segmentis inaequales facient angulos, et triangula super illis segmentis inaequalia erunt.

6a. Si rectae alicui in ipsius extremis insistant duae rectae aequales; ex harum vero terminis ductae ad punctum aliquod prioris rectae intermedium duae rectae faciant quidem aequalia super ejus segmentis triangula, segmenta autem ipsa inaequalia: insistentes tam cum priori recta, quam cum duabus posterioribus ductis inaequales facient angulos.

6b. Si rectae alicui in ipsius extremis insistant duae rectae aequales; ex harum vero terminis ductae ad punctum aliquod prioris rectae intermedium duae rectae faciant quidem aequalia super ejus segmentis triangula, ipsae autem inter se sint inaequales: insistentes tam cum priori recta, quam cum duabus posterioribus ductis inaequales facient angulos.

6c. Si e duobus punctis extra rectam terminatam sumtis ad punctum, in quo illa bifariam secatur, duae rectae ductae sint, et ex iisdem ad illius extrema ductae duae rectae faciant quidem triangula super segmentis aequalia, ipsae autem inter se sint inaequales:

tam priores, quam posteriores duae facient inaequales cum segmentis angulos.

6d. Si e duobus punctis extra rectam terminatam sumtis ad punctum, in quo illa bifariam secatur, ductae duae rectae inaequales sint; ex iisdem autem ad illius extrema ductae duae rectae faciant triangula super segmentis aequalia: tam priores quam posteriores duae facient inaequales cum segmentis angulos.

6e. Si e duobus punctis extra rectam terminatam sumtis ad punctum, in quo illa in inaequalia secta esto ductae duae rectae aequales sint; ex iisdem ad illius extrema ductae duae rectae faciant triangula super illis segmentis aequalia: duae priores ductae tam cum posterioribus, quam cum segmentis prioris rectae facient angulos inaequales.

6f. Si e duobus punctis extra rectam terminatam sumtis ductae duae rectae aequales ad punctum in ipsa intermedium, et aliae duae inaequales ad ejus extrema, faciant triangula super segmentis in puncto illo factis aequalia: duae priores ductae tam cum posterioribus duabus, quam cum dictis segmentis facient angulos inaequales.

7a. Si e duobus punctis extra rectam terminatam sumtis ductae duae rectae inter se aequales, sed sub angulis inaequalibus, ad ipsius extrema, et aliae duae rectae ad punctum in ipsa intermedium, faciant triangula super segmentis illo puncto factis aequalia: inaequales anguli ad sumta duo puncta a prioribus ductis cum posterioribus comprehensi erunt.

7b. Si e duobus punctis extra rectam terminatam sumtis ductae duae rectae inter se aequales ad ipsius extrema, et aliae duae rectae ad punctum ipsius in-

termedium, facientes angulos cum prioribus ductis inaequales, faciant triangula super segmentis illo puncto factis aequalia: priores duae facient inaequales ad extrema prioris rectae angulos.

7c. Si e duobus punctis extra rectam terminatam sumtis ductae duae rectae ad punctum, in quo illa bifariam secatur, et aliae duae ad illius extrema sub angulis inaequalibus insistentes faciant triangula super segmentis aequalibus aequalia: priores duae in puncto bisectionis cum segmentis facient angulos inaequales.

7d. Si e duobus punctis extra rectam terminatam sumtis ductae duae rectae ad punctum, in quo illa bifariam secatur, sub angulis, quos altera cum altero segmento faciunt, inaequalibus, et aliae duae ad illius extrema ductae, faciant triangula super illis segmentis aequalia: posteriores ductae ad extrema sub angulis inaequalibus insistent.

7e. Si e duobus punctis extra terminatam rectam sumtis ductae duae rectae ad punctum in ipsa intermedium aequales quidem inter se, sed sub angulis, quos altera cum altero segmento faciunt, inaequalibus, et aliae duae ad illius extrema ductae, faciant triangula super illis segmentis aequalia: anguli ad sumta duo puncta comprehensi a prioribus ductis cum posterioribus inaequales erunt.

7f. Si e duobus punctis extra rectam terminatam sumtis ductae duae rectae ad punctum in ipsa intermedium inter se aequales, et aliae duae ad extrema ductae, facientes cum prioribus angulos ad sumta illa duo puncta inaequales, faciant triangula super segmentis puncto intermedio factis aequalia: priores duae

ad punctum intermedium inaequales facient cum segmentis angulos.

8*a*. Si e duobus punctis extra rectam terminatam sumtis ductae duae rectae ad ipsius extrema inter se aequales, et aliae duae ad punctum ipsius intermedium sub angulis, quos altera cum altero segmento faciunt, inaequalibus, faciant triangula super illis segmentis aequalia: priores tam cum priori recta ad ejus extrema, quam cum posterioribus ad sumta puncta inaequales angulos facient.

8*b*. Si e duobus punctis extra rectam terminatam sumtis ductae duae rectae ad ipsius extrema, et aliae duae rectae ad punctum, in quo illa bifariam secatur, facientes cum prioribus angulos ad sumta puncta inaequales, faciant triangula super aequalibus segmentis aequalia: tam priores, quam posteriores ductae cum rectae prioris segmentis facient angulos inaequales.

8*c*. Si e duobus punctis extra rectam terminatam sumtis ductae duae rectae ad ejus extrema sub angulis inaequalibus, et aliae duae ad punctum ipsius intermedium inter se aequales, faciant triangula super segmentis illo puncto factis aequalia: duae posteriores tam cum prioribus ad sumta duo puncta, quam cum prioris rectae segmentis in puncto intermedio facient angulos inaequales.

9*a*. Si e duobus punctis extra rectam terminatam sumtis ductae duae rectae ad ipsius extrema inter se inaequales, et aliae duae ad punctum ipsius intermedium, facientes cum prioribus ad sumta duo puncta angulos aequales, faciant triangula super segmentis puncto intermedio factis aequalia: duae posteriores ductae

inaequales erunt, et major quidem ex eo sumtorum punctorum, e quo priorum minor, ducta.

9b. Si e duobus punctis extra rectam terminatam sumtis ductae duae rectae ad ipsius extrema, et aliae duae rectae ad punctum ipsius intermedium, facientes quidem angulos ad sumta puncta cum prioribus aequales, ipsae autem inter se inaequales, faciant triangula super segmentis puncto intermedio factis aequalia: priores duae rectae etiam inter se inaequales erunt, et major, quae ex eo sumtorum punctorum ducta est, e quo minor posteriorum duarum.

9c. Si e duobus punctis extra rectam terminatam sumtis ductae duae rectae ad ipsius extrema inaequales quidem, sed sub angulis aequalibus, et aliae duae ad punctum ipsius intermedium, faciant triangula super segmentis puncto intermedio factis aequalia: segmenta illa erunt inaequalia, et majus quidem, quod minori priorum ductarum adjacet.

9d. Si e punctis duobus extra rectam terminatam sumtis ductae duae rectae ad ipsius extrema sub angulis aequalibus, et aliae duae ad punctum, in quo illa in inaequalia divisa est, faciant triangula super inaequalibus segmentis aequalia: priores duae inaequales erunt, et major quidem, quae minori segmento adjacet.

9e. Si e punctis duobus extra rectam terminatam sumtis ductae duae rectae ad ipsius extrema, et aliae duae ad punctum ipsius intermedium sub angulis quidem, quos altera cum altero segmento facit, aequalibus, ipsae autem inter se inaequales, faciant aequalia super illis segmentis triangula: erunt illa segmenta inaequalia, et majus quidem id, quocum minor po-

steriorum ductarum angulum unum eorum, qui aequales sunt, facit.

9*f*. Si e puncto, in quo recta aliqua in inaequalia secta est, duae rectae eductae sint sub angulis aequalibus, quos altera cum altero segmento faciunt, et ex ipsarum terminis ad prioris rectae extrema ductae rectae faciant triangula super segmentis aequalia: inaequales erunt eductae, et major earum ea, quae cum minori segmento facit unum angulorum aequalium.

10*a*. Si e duobus punctis extra rectam terminatam sumtis ductae duae rectae ad illius extrema, et aliae duae ad punctum, in quo illa in inaequalia secta est, facientes cum prioribus angulos aequales ad sumta puncta, faciant et triangula super inaequalibus segmentis aequalia: erunt tam duae priores, quam duae posteriores ductae inter se inaequales.

10*b*. Si e duobus punctis extra rectam terminatam sumtis ductae duae rectae ad illius extrema sub angulis aequalibus, et aliae duae ad punctum in ipsa intermedium inter se inaequales, faciant triangula super segmentis illo puncto factis aequalia: segmenta inaequalia erunt, et priores ductae ad extrema inaequales.

10*c*. Si e duobus punctis extra rectam terminatam sumtis ductae duae rectae ad illius extrema inaequales, et aliae duae ad punctum ipsius intermedium sub angulis, quos altera cum altero segmento faciunt, aequalibus ductae, faciant triangula super illis segmentis aequalia: segmenta inaequalia erunt, et duae posteriores ductae inaequales.

11*a*. Si e duobus punctis extra rectam terminatam sumtis ductae duae rectae ad ipsius extrema sub angulis

gulis inaequalibus, et duae aliae ad punctum ipsius intremedium, facientes cum prioribus angulos aequales ad sumta puncta, faciant et triangula super segmentis puncto intermedio factis aequalia: erunt tam duae priores quam duae posteriores ductae inaequales.

11*b*. Si e duobus punctis extra rectam terminatam sumtis ductae duae rectae ad ejus extrema, et duae aliae ad punctum ipsius intermedium, facientes cum prioribus quidem angulos aequales, cum prioris autem segmentis, altera cum altero, inaequales angulos. faciant triangula super illis segmentis aequalia: erunt et duae priores et duae posteriores ductae inaequales.

11*c*. Si e duobus punctis extra rectam terminatam sumtis ductae duae rectae ad ejus extrema sub angulis aequalibus, et aliae duae ad punctum ipsius intermedium, facientes cum prioribus angulos inaequales, faciant triangula super segmentis puncto intermedio factis aequalia: duae priores inter se inaequales erunt, et duo segmenta inaequalia.

11*d*. Si e duobus punctis extra rectam terminatam sumtis ductae duae rectae ad ejus extrema sub angulis aequalibus, et aliae duae ad punctum ipsius intermedium sub angulis, quos altera cum altero segmento faciunt, inaequalibus, faciant triangula super illis segmentis aequalia: segmenta inaequalia erunt, et duae priores ductae inaequales.

11*e*. Si e duobus punctis extra rectam terminatam sumtis ductae duae rectae ad ejus extrema, et duae aliae ad ejus punctum intermedium, facientes angulos cum ipsius segmentis, altera cum altero, aequales, cum prioribus autem ductis inaequales, faciant triangula super illis segmentis aequalia: erunt duo segmenta

cum segmentis puncto intermedio factis, altera cum altero, aequales angulos: duae posteriores ductae inaequales erunt.

12*e*. Si e duobus punctis extra rectam terminatam sumtis ductae sint duae rectae ad ejus extrema, inaequales quidem, sub angulis vero aequalibus, et aliae duae ad punctum ipsius intermedium sub angulis item aequalibus, quos altera cum altero segmento faciunt: segmenta erunt inaequalia.

12*f*. Si e duobus punctis extra rectam terminatam sumtis ductae sint duae rectae ad ejus extrema sub angulis aequalibus, et duae aliae ad punctum ipsius intermedium, inter se inaequales, facientes autem angulos cum segmentis, puncto intermedio factis, altera cum altero, aequales segmenta ea inaequalia erunt.

13*a*. Si e duobus punctis extra rectam terminatam sumtis ductae duae rectae ad ejus extrema sub angulis aequalibus, et duae aliae ad punctum ipsius intermedium facientes cum prioribus angulos aequales, faciant triangula super segmentis puncto illo intermedio factis inaequalia: duae priores ductae inaequales erunt.

13*b*. Si e duobus punctis extra rectam terminatam sumtis ductae duae rectae ad ejus extrema, et duae aliae ad punctum ipsius intermedium, facientes tam cum prioribus ductis, quam cum segmentis puncto intermedio factis, altera cum altero, angulos aequales, faciant triangula super segmentis illis inaequalia: duae posteriores ductae inaequales erunt.

13*c*. Si e duobus punctis extra rectam terminatam sumtis ductae duae rectae ad ejus extrema sub

angulis aequalibus, et duae aliae ad punctum ejus intermedium item sub angulis, quos altera cum altero segmentorum puncto illo factorum faciunt, aequalibus, faciant triangula super segmentis inaequalia: ipsa quoque segmenta inaequalia erunt.

Haec quidem ad Theorematis 1mi Cap. III. Casus II. et III. Ad primum enim casum rursus aliae obtinerentur propositiones applicandis § 321. 323. Sed hae hactenus applicationes satis praebent exempli ad similia in ceteris invenienda.

C A P U T IX.

Exhibet theoremata talia nonnulla, quae Data vel de Datis a Geometris appellantur; eaque item ad Elementorum propositionem quartam ejusque applicationes in praecedentibus contentas pertinentia: ubi primum generalia quaedam de Analysi et de Datis praemittuntur.

I. De Analysi.

§. 334.

Quae ab antiquis jam Geometris usurpata et appellata est Analysis, habet, ut a Proclo observatum (vid. Chrestom. geom. p. 211.), aliquid commune cum apagogica demonstrandi ratione, cujus haec vis est, ut vidimus, ut falsitas vel impossibilitas alicujus suppositi arguatur ex eo, quod inveniatur ejus aliquod consequens falsum vel impossibile: ut, si posito esse A, consequens sit esse B; constet autem non esse B; efficitur neque A esse. Itemque si non quidem pro-

ximum, sed remotius aliquod consequens falsum esse constet: ut si posito A, consequens sit esse B, et posito B consequens sit C, et posito C consequens sit D; sciamus autem, D non esse: recte colligetur, neque A esse. Neque enim falsi suppositi primum semper et proximum consequens statim tale est, ut falsum deprehendatur, eoque etiam suppositi falsitatem convincat: sed ad ulteriora plerumque consequentia progrediendum est. Nam in ipsa El. I. 6ae. demonstratione, quae prima in Elementis indirecta est, quod primum illic ex positione, Δ B aequalem esse A Γ (v. fig. text. graec.), per El. I, 4. consequitur, nempe basin Γ Δ basi A B aequalem esse, nondum habet manifestam absurditatem; sed demum quod postea consequitur, triangulum B Δ Γ triangulo A B Γ aequale esse, vel angulum Δ Γ B angulo A B Γ aequalem esse. Et si ponas duo triangula duos angulos duobus angulis aequales, alterum alteri, et latus lateri, quod uni aequalium angulorum opponitur, aequale habere, reliquum autem angulum reliquo inaequalem: rem sane impossibilem ponis; sed ejus suppositi proximum consequens erit, ut etiam latus lateri aequalibus duobus angulis adjacens inaequale sit: quod quidem illius suppositi impossibilitatem nondum evincit. Aut si ponas recta e vertice trianguli ad basin ducta basim quidem bifariam, sed triangulum in inaequalia dividi; aut si basin quidem in inaequalia, sed triangulum in aequalia dividi: proxime consequetur, ut ea recta basi sub angulis deinceps inaequalibus seu obliquis insistat: ex quo nondum liquet, quod tamen utique verum est, suppositum impossibile esse.

Sed sive proximum sive remotius consequens falsum aut impossibile sit, recte omnino colligitur, illud quoque, ex quo illud necessario consequebatur, falsum aut impossibile esse. Qua propter ad judicandum, utrum aliquid verum sit necne, possibile an secus, investigatio consequentium ejus ita inservit, ut, quoties in falsum aut impossibile consequens incidatur, transacta res sit, cum et illud, de quo quaeritur, tale esse debeat. Quid autem, si in nullum tale consequens incidatur, sed in nulla alia quam vera et possibilia consequentia? Non sane ex veritate aut possibilitate consequentis sive proximi sive remotioris statim licet inferre veritatem vel possibilitatem ejus, ex quo illud consequebatur; nisi consequentia illa converti possint seu reciprocentur: quod si ita sit, constabit et de ejus, de quo quaeritur, veritate vel possibilitate: itaque ne hic quidem fructu caruerit consequentium investigatio.

Velut, in theoretico primum genere, si quaeratur, num verum sit A; et inveniamus, posito illo esse, esse etiam B; sed hoc posito, esse etiam C; et hoc posito, esse D; constet autem D verum esse absolute et sine conditione; non hinc quidem statim efficitur, verum esse A. Sed si consequentia illa reciprocentur, nempe ut et ipsi D consequens sit C, et ipsi C consequens B, et ipsi B consequens A; tunc omnino constabit esse A. Atque hoc fundamentum est demonstrationum analyticarum, quarum exempla exstant in Element. Lib. XIII.

Venimus ad problematicum genus. Sit igitur faciendum aliquid, quod dicamus A. Jam si praesto habemus propositionem aliquam hujusmodi: Ubi

est B, erit et A; et sciamus facere B: hoc facto, factum erit A. Et haec dicitur problematis, quo faciendum aliquid proponitur, ad faciendum aliquid notius reductio: effectio enim ejus, de quo quaerebatur, A reducta est ad effectionem alterius B, quam in promtu habemus. Sed saepe fit, ut id, cujus nota est efficiendi ratio, non sit proximum ipsius A antecedens, sed remotius aliquod: ut cum scimus facere D; sed effectio D praebet effectum C; et rursus effectum C praebet effectum B, et hoc denique praebet effectum A. Jam in his casibus remotius illud antecedens, uti D, plerumque non tam facile et ultro se offert contemplanti, nisi inversam ingrediatur viam per consequentia: propterea quod, sicuti Lambert (in N. Organo Dian. §. 328.) observat: facilius esse subjecti alicujus plura praedicata invenire, quam praedicati subjecta; sic facilius est, antecedentis alicujus consequentia invenire, quam consequentis antecedentia. Itaque si inveniat, posito A facto, ipsi A consequens esse B, ipsi B consequens C, et ipsi denique C consequens D; notum autem habeat, quomodo faciat D: effectionem quoque ipsius A notam habebit, si tamen reciprocatio locum habeat in illis consequentibus, ut et C ipsi D, et B ipsi C, et A ipsi B consequens sit. At facilius erat invenire D in consequentibus, quam id invenire in antecedentibus. Nec tamen ad propositum sufficeret inventum D in consequentibus, nisi reperiretur idem D etiam in antecedentibus: quod ut fieri posset, opus erat propositionibus conversionem admittentibus. Unde apparet theorematum convertibilium usus ad resolvenda problemata. Convertibilia autem ea sunt theoremata, quae et universa-

liter et simul exclusive enuntiari possunt; ut si de A praedicatur B sic, ut et omnia A et sola A sint B. Tunc enim nullum est B, nisi quod sit A; ergo et omne B est A: quae conversa propositio est ejus, quae dicit omne A esse B.

Ista autem consequentium investigatio, donec ex eo, quod faciendum proponitur, deveniatur ad aliquod consequens tale, cujus effectio nota sit, dicitur Resolutio seu Analysis problematis. Tunc si efficiatur hoc posterius, et ex eo effecto ostendatur, id quoque, quod proponebatur, factum esse, id Compositionis seu Syntheseos nomen habet, quae tota fere relegendis Analyseos vestigiis absolvitur.

§. 335.

Huc pertinet classicus ille Pappi Loous in Praefatione ad librum septimum Collectionis mathematicae (apud Hallejum in ejus editione Apolloni; Librorum de sectione Rationis et Spatii. Oxonii 1706.), qui sic habet: „Resolutio est methodus, qua a quaesito quasi jam concesso, per ea, quae deinde consequuntur, ad conclusionem aliquam, cujus ope compositio fit, perducamur. In resolutione enim, quod quaeritur, ut jam factum supponentes, ex quo antecedente hoc consequatur, expedimus; iterumque quodnam fuerit hujus antecedens, atque ita deinceps, usque dum in hunc modum regredientes, in aliquid jam cognitum locoque principii habitum incidamus. Atque hic processus Analysis vocatur, quasi dicas, inversa solutio" (*αναπαλιν λυσισ*). „E contrario autem in compositione cognitum illud,

Ad Prop. I, quae eadem est et Probl. I. Hic super data recta A B construendum est triangulum aequilaterum. Ponatur ergo factum, et triangulum A Γ B (fig. text. graec.) esse id, quod quaeritur. Quoniam igitur aequales sunt A B, A Γ sequitur, ut circuli centro A intervallo A B descripti circumferentia per punctum Γ transeat (per Conversam Defin. 15ae.: neque enim ultra neque citra transibit; alioquin A B major aut minor esset A Γ.) Similiter, quia B Γ, B A aequales sunt, etiam circuli centro B intervallo B A descripti circumferentia per Γ transibit. Ergo si sit, uti posuimus, A Γ B triangulum aequilaterum; consequens est ut punctum illud Γ in utraque situm sit circumferentia, tam circuli centro A intervallo A B, quam circuli centro B intervallo B A descripti. Sed haec converse quoque vera sunt: nempe primo ut in prioris circuli circumferentia sumtum punctum quodcumque Γ faciat rectas A Γ, A B aequales (per Def. 15.): in posterioris autem, faciat rectas B Γ, B A aequales: atque hinc, si utrique circumferentiae commune sit punctum Γ, hoc est, in ipsa earum intersectione sumtum, faciat simul et A Γ, A B et B Γ, B A aequales; itaque triangulum A Γ B aequilaterum.

Idem dicemus paullo aliter, sic ut reciproca statim conjungamus. Sit triangulum A Γ B aequilaterum 1) Cum igitur aequales sint A B, A Γ: erit Γ illius trianguli vertex in circumferentia circuli centro A radio A B descripti. Ac vicissim: si hujus circumferentiae punctum quodcumque sumatur pro vertice trianguli super basi A B constituti: habebit illud triangulum latus in A terminatum basi A B aequale.

2) Rursus cum sint B A, B Γ aequales: erit trianguli aequilateri vertex Γ in circumferentia circuli centro B radio B Γ descripti. Ac rursus vicissim: si hujus circumferentiae punctum quodcumque fiat vertex trianguli alicujus super A B constituti: habebit illud triangulum latus in B terminatum aequale basi B A.

3) Hinc in triangulo A Γ B aequilatero, cum sint tam A B, A Γ aequales, quam B A, B Γ aequales: erit Γ punctum utrique circumferentiae commune, seu ipsa intersectio duorum illorum circulorum. Ac vicissim: Si illorum circulorum intersectio fiat vertex trianguli alicujus super A B constituti; erit illud aequilaterum.

Ad Elem. Prop. II. seu Probl. 2*dum*. (vid. fig text. graec.) Sit ad datum punctum A recta linea aequalis datae B Γ ponenda. Habet hoc problema aliquid inde terminati, quia de situ illius ducendae nihil praecipitur; infinitae autem ad A poni possunt aequales ipsi B Γ, si situs sit indifferens. Sed ex his infinitis una tantum quaecumque duci vel poni postulatur. Liberum est igitur, situm sumere, prout commodum fuerit. Descripto igitur super A B triangulo aequilatero A Δ B; et productis Δ A, Δ B ad E, Z, satisfiet proposito, si ea, quae poni ad A jubetur aequalis B Γ, secundum ipsam A E ponetur, veluti A Λ. Itaque si rectae B Γ aequalis a B Z abscindatur B H (quod fiet describendo circulum centro B radio B Γ, secantem B Z in H): consequens erit, ut sit A Λ aequalis B H. Quia autem et Δ A aequalis est Δ B: aequalia aequalibus addendo, consequens est, ut et tota Δ Λ toti Δ H aequalis sit. Vicissim autem si Δ Λ facta fuerit aequalis Δ H: demtis aequalibus Δ A, Δ B; erit et A Λ aequalis B H, et

hinc aequalis B Γ. Reductum ergo est problema eo, ut a Δ E abscindatur Δ Λ aequalis Δ H: quod fiet, centro Δ radio Δ H describendo circulum, qui rectam Δ E secet in Λ. Secare autem debebit ultra A, quia Δ H major est Δ B seu Δ A: (si enim in A, vel inter Δ et A secaret, foret Δ A aequalis aut major Δ H, cum sit minor.)

Ad El. Prop. III. seu Probl. *3tium* (v. fig. text.) Hoc a secundo differt eo, quod hic situs rectae ad A ponendae, qui illic liber erat, determinatus sit: cum a recta majori A B abscindere rectam aequalem minori Γ, idem sit, atque ad punctum A ponere rectam aequalem Γ, situ suo secundum datam A B protensam. Crebro autem Problematum minus determinatorum solutio inservit solutioni magis determinatorum, ut in proemio Cap. IV. §. 171. annotavimus. Sic igitur hic, cum per praecedens possit ad punctum A poni aliqua recta aequalis Γ: si ea quidem cadat secundum ipsam A B; factum erit, quod quaeritur: ipsa enim erit ea, quae abscindi jubetur: sin aliter cadat, ut A Δ; re Γ conficietur, centro A radio A Δ describendo circulum, qui ipsam A B secet in E. Secabit autem inter A et B. quia A B major est Γ seu A Δ; nam si in B vel ultra B secaret; foret A Δ aequalis vel major A B, quod non est.

Ad El. Prop. IX. seu Probl. IV. (v. fig. text.) Si datus angulus B A Γ jubeatur bifariam secari; ponatur id fieri recta A Z, et sumatur in ipsa punctum quodcumque Z. Consequens erit, ut, si ab rectis A B, A Γ abscindantur utcumque aequaeles A Δ, A E, et jungantur Z Δ, Z E, hae aequales sint per El. prop. 4. Vicissim vero: si A Δ, A E abscissis ae-

qualibus utcumque, duae ex punctis Δ, E ductae sint rectae inter se aequales Δ Z, E Z coeuntes in quocumque puncto Z: consequens erit, ut juncta A Z angulum B A Γ bifariam dividat per El. prop. 8. Itaque problema de bifariam secando angulo B A Γ reducitur eo, ut, acceptis A Δ, A E utcumque aequalibus, duae ducantur rectae ex punctis Δ, E in eodem puncto concurrentes aequales: quas quidem commodius erit sumere ad alteras junctae rectae Δ E partes, quam ad quas est punctum A. Quae autem earum sit longitudo, nihil interest; et si utramque aequalem Δ E sumere commodum sit, licet. Hoc autem facere, nihil aliud est, quam super recta Δ E constituere triangulum aequilaterum ad partes ipsius Δ E ab A aversas: quod fiet per El. prop. I. Atque ita devenimus ad eam problematis compositionem, quam tradit Euclides.

Ad El. Prop. X. seu Probl. Δ. (v. fig. text.) Sit data recta A B bifariam secanda. Quae si bifariam secta sit in Δ: descripto super ipsa triangulo aequilatero Γ A B, junctaque Γ Δ, consequens erit, ut, quia duo latera A Γ, Γ Δ duobus lateribus B Γ, Γ Δ aequalia sunt, et basis A Δ basi Δ B aequalis est, angulos quoque A Γ Δ angulo B Γ Δ aequalis sit per El. prop. 8., hoc est, angulus A Γ B recta Γ Δ bifariam divisus. Ac vicissim: si descripto super A B triangulo aequilatero Γ A B, angulus A Γ B bifariam secetur recta Γ Δ, erit per prop. 4. A Δ quoque aequalis Δ B, seu recta A Δ bifariam in Δ secta. Problema igitur de bifariam secanda recta A B reductum est ad bifariam secandum angulum A Γ B: quod efficitur per Probl. praec.

Ad El. Prop. XI. seu Probl. VI. (v. fig. text.) Sit rectae datae A B in puncto in ipsa dato Γ ducenda recta ad angulos rectos. Si Γ Z sit, quae duci jubetur, ad rectos angulos ipsi A B, et in ipsa sumatur punctum Z quodcumque, ab rectis autem Γ A, Γ B abscindantur aequales utcumque Γ Δ, Γ E: consequens erit, ut junctae Z Δ, Z E aequales sint (per Def. 10. et prop. 4.) Vicissim autem: Si sumtis Γ Δ, Γ E utcumque aequalibus duae rectae quaecumque ex punctis Δ, E ductae fuerint in uno puncto concurrentes aequales Δ Z, E Z: juncta Z Γ erit ipsi A B ad angulos rectos, per Prop. 8. et Def. 10. Itaque problema de ducenda ad A B recta perpendiculari, eo deductum est, ut sumtis Γ Δ, Γ E utcumque aequalibus, ducantur ex Δ, E duae rectae in uno puncto concurrentes inter se aequales Δ Z, E Z: quos, quia nihil interest, quantae sint longitudinis, liberum est facere ipsi Δ E aequales; quod est idem, ac constituere super Δ E triangulum aequilaterum Δ Z E; ac tum recta Z Γ ducatur: quae propositio satis faciet.

Ad El. Prop. XII. Probl. VI. (v. fig. text. graec.) In rectam datam A B infinitam e puncto extra ipsam dato Γ ducenda sit recta perpendicularis. Si recta Γ Θ sit perpendicularis ipsi A B, et aequales utcumque capiantur rectae Θ E, Θ H: consequens est per Def. 10. et Prop. 4., ut junctae Γ E, Γ H sint aequales. Ac vicissim: si e puncto Γ ad rectae A B ductae fuerint utcumque aequales rectae Γ E, Γ H; ipsa autem E H bifariam secetur in Θ: per Prop. 8. et Def. 10. erit Γ Θ ipsi A B perpendicularis. Problema igitur de ducenda ex puncto Γ ad rectam A B perpendiculari, eo reducitur, ut e puncto Γ duae rec-

tae aequales, quantaecumque longitudinis, uti Γ E, Γ H ad A B ducantur, tumque recta earum terminis E, H interjecta E H bifariam secta in Θ, ducatur Γ Θ. Ut autem duae aequales rectae ex Γ ad A B ducantur, fiet describendo centro Γ circulum aliquem, qui rectam A B secet, ut in E, H. Sed illa sectio non in quolibet circulo continget, cum et circulus centro Γ describi possit, qui totus ad eas partes rectae A B, ad quas est Γ, cadat, nec ullum ejus punctum ad alteras partes situm sit. Si vero aliquod ipsius punctum, uti Δ, ad alteras partes situm sit: necessario rectam A B secabit. (cf. Chrest. geom. p. 195. *No.* 20. 1.) Quocirca sumto puncto Δ quocumque ad alteras ipsius A B partes, centro Γ intervallo Γ Δ describatur circulus: is rectam A B necessario in duobus punctis secabit, ut in E, H: tum bifariam secta E H in Θ, juncta Γ Θ erit ipsi A B perpendicularis.

Ad Elem. Prop. XXII. Probl. VII. (v. fig. text. graec.) Datis in recta linea rectis Δ Z, Z H, H Θ; super recta Z H describere oporteat triangulum, cujus latus quidem in Z terminatum sit aequale Z Δ, latus vero in H terminatum sit aequale H Θ. Huc enim problema hoc, de quo agimus, reducitur. Si triangulum Z K H sit tale, nempe ut habeat latus Z K aequale Z Δ, et latus H K aequale H Θ: primo propter aequales Z K, Z Δ, punctum K erit in circumferentia circuli centro Z intervallo Z Δ descripti, (per conversam Definitionis *15ae*): deinde similiter propter aequales H K, H Θ, punctum K erit in circumferentia circuli centro H intervallo H Θ descripti: ergo punctum K erit commune utrique circumferentiae, seu ipsa illorum circulorum intersectio.

Ac

Ac vicissim; si duo illi circuli descripti fuerint, et earum intersectio sit K; junctis K Z, K H, erit in priori circulo Z K aequalis Z Δ; in posteriori H K aequalis H Θ (per ipsam Def. 15.) Reductum est igitur problema eo, ut duo circuli, unus centro Z intervallo Z Δ, alter centro H intervallo H Θ, describantur, et ex eorum intersectione K rectae K Z, K H ducantur. Ceterum ii circuli se invicem intersecabunt, si rectarum Δ Z, Z H, H Θ binae simul sumtae majores sint reliqua: ut ostensum est in Chrest. geom. pag. 264 s.

Ad Elem. Prop. XXIII. Probl. VIII. (v. fig. text. graec.) Ad datam rectam A B in puncto ejus dato A applicare oporteat angulum angulo dato Γ aequalem. Si angulus B A Z aequalis sit angulo Γ: abscissis A Z et Γ Δ utcumque aequalibus, itemque A H et Γ E: per prop. 4. junctae Z H, Δ E aequales erunt. Ac vicissim: si Γ Δ, Γ E abscissis utcumque, et juncta Δ E, ab recta A B quidem abscindatur A H aequalis Γ E, rectae autem ex A et H ducantur in uno puncto concurrentes, A Z quidem aequalis Γ Δ, H Z vero aequalis E Δ: per prop. 8. erit angulus B A Z aequalis angulo Γ. Problema igitur, ad datam A B in A applicandi angulum dato Γ aequalem, reducitur eo, ut ducta recta quacumque Δ E intra datum angulum Γ, describatur triangulum A Z H habens latera A Z, Z H, H A lateribus Γ Δ, Δ E, E Γ sigillatim aequalia: quod fit ope praecedentis.

Sed haec exempla sufficiant.

§. 337.

Quodsi alicujus problematis habeatur *αποδειξις* (dico autem *αποδειξιν* problematis eo modo, quo veteres plerumque solent, ut et compositionem et demonstrationem compositionis illa voce comprehendant) talis, in qua usurpetur propositio non convertibilis: non dari poterit Analysis ejus talis, quae reciproce respondeat illi *αποδειξει*. Nam si Omni A consequens sit B, sed non reciproce Omni B consequens sit A: si nota sit ratio efficiendi A; problema construendi B absolvetur construendo A; quia, uti posuimus, omni A est et B consequens. Cui *αποδειξει* si aliqua reciproce responderet Analysis; ea talis esset: Pone B factum; ergo erit A. Sed A fieri potest: ergo et B. Sed ea argumentatio non habet locum, quia non conceditur, ubi B sit, ibi et A esse.

Accidit autem hoc, de quo loquimur, quando id, quod efficiendum est, non uni soli antecedenti consequens est, sed pluribus diversis. Tunc enim effecto uno ex his antecedentibus, effectum habebitur et consequens, et habebitur una problematis solutio. Sed praeter hanc alia vel plures aliae ejus solutiones erunt: nam et aliud ex antecedentibus efficiendo, pariter solvetur. Itaque si problematis alicujus compositio habeatur, in cujus demonstratione usurpentur propositiones non convertibiles; id indicio esse solet, problematis plures una solutiones dari, et veram Analysin aliam esse, quam cui ista demonstratio reciproce respondeat.

Pro exemplo sumetur ex Cap. IV. §. 173. Problema X (v. fig. ibid.) in quo propositum erat *Fig.* 63. dato angulo B A C bifariam secto recta A D, cujus e termino D ad rectam A B ducta sit aliqua recta D E; ab eodem termino D ad rectam A C ducere rectam ipsi D E aequalem. Cujus haec erat compositio: Abscissa ab A C recta A F aequali A E, ducatur D F: ea satisfaciet proposito. Quoniam enim duae E A, A D duabus F A, A D aequales sunt, et angulus E A D angulo F A D aequalis: per El. prop. 4. erit et basis D E basi D F aequalis: ducta igitur est ex D ad A C recta D F aequalis D E; quod erat faciendum.

Jam ad hanc *αποδειξιν* si qua esset Analysis, cui illa reciproce responderet; ea talis esse deberet: Pone factum, et sit D F ea, quae duci jubetur aequalis D E. Quoniam igitur duae E D, D A duabus F D, D A aequales sunt, et angulus E A D angulo F A D aequalis: erit etiam A E aequalis A F. Sed haec argumentatio locum non habet: non enim ex aequalitate unius lateris et basis et anguli basi oppositi simpliciter et universim consequitur, ut omnimode aequalia sint duo triangula, et nominatim alterum quoque latus alteri aequale habeant (v. Chrest. geom. p. 320.) Nec mirum videri debet, quod ista Analysis locum non habet: etsi enim facta A F aequali A E, sit et juncta D F aequalis D E: tamen et alio modo recta ex D ad A C duci potest aequalis D E; tali inquam modo, ut non sit A F aequalis A E; si saltim recta D E nec perpendicularis sit ad A B nec major D A: tunc enim circulus centro D radio D E descriptus rectam A C bis secabit, et praeter eam, quae respondet sumtae A F aequali A E, alteram insuper rectam da-

sit recta B E sub angulo aequali C A D: et requiratur, ex puncto C ad rectam B E ducere rectam, quae triangulum terminet aequale triangulo C A D. Hic forte quisquam Analysin sic instituat. Pone factum, et sit C F ea, quae duci jubetur: faciatque triangulum B C F aequale triangulo C A D. Quoniam igitur duo triangula C A D, C B F latus A C lateri C B, et angulum angulo, qui illi adjacet, C A D ipsi C B F, aequalia habent, et ipsa inter se aequalia sunt: per ostensa §. 240. basin quoque C D basi C F aequalem habebunt: ergo punctum F jacebit in circumferentia circuli centro C radio C D descripti. Hac fretus Analysi si quis centro C radio C D describat circulum, qui rectam B E secet in F, et jungat rectam C F: is nisi justam cautionem in sumenda una ex duabus intersectionibus adhibeat, facile falletur: ut, licet habeat C F aequalem C D, triangulum tamen B C F triangulo A C D aequale non habeat. Nimirum quod illa propositio, quae in Analysi usurpabatur, non reciprocatur: non enim necessario et universim aequalia sunt triangula, quae latus lateri, et basin basi, et angulum angulo, qui basi opponitur, aequalem habent. Vel sumendo in denominationibus supra adhibitis pro A, duo triangula habentia latus lateri et angulum angulo aequalem, et ipsa inter se aequalia; pro B, habentia latus lateri, et basin basi, et angulum angulo, qui basi opponitur, aequalia: omni quidem A consequens est B, sed non omni B consequens A.

Etsi igitur Analysis generatim a quaesito ad ejus consequentia procedit: tamen non omnia omnino consequentia ad assequendum id, quod quaeritur, ducunt, sed ea tantum, quae etiam inverse pro antecedentibus

sumi possint. Quod si in omnibus fieri possit, per quae proceditur, consequentibus: Analysis ad efficiendum id, quod volumus, inserviet: sin secus; non inserviet; vel. si malis ita dicere, non erit justa Analysis. Quamobrem recte Pappus initio eorum, quae de Analysi dicit, quae supra attulimus, ita disserit, ut eam non tam in consequentium ejus, quod quaeritur, quam in antecedentium ejus investigatione versari significet.

II. De Datis in genere.

§. 339.

Quoniam autem insigne ad resolutionem problematum adminiculum praebent theoremata de Datis, ac nos jam nonnulla ejusmodi proposituri sumus, quae ad materiam hujus scriptionis, hoc est, Elementorum theorema primum ejusque consectaria in superioribus tradita referuntur: de Datis in universum, quam ea vim, quem usum in geometria habeant, videtur nonnihil praefandum esse. Cum igitur in theorematibus quidem generatim proponantur figurarum proprietates nullo habito discrimine tali, ut earum partes aliae datae sint, aliae quaesitae et ex datis inveniendae; ad problematum autem resolutionem opus sit geometrae, in considerandis figuris perpetuo relationem animo praesentem habere, quam ca, quae data sunt, habeant ad ea, quae invenienda sunt: ad ejus considerationis usum visum est Euclidi colligere penum quendam generaliorum propositionum de nexu illo inter data et invenienda agentium; quem si quis in promtu haberet,

in resolvendis problematibus facilius, quo vellet, perveniret. Nam cum in proponendis plerisque problematis quaedam dentur, puta, lineae rectae, circulorum circumferentiae (ne ultra materiam elementarem hic excurramus), idque vel positione, vel magnitudine, vel utroque; porro anguli, spatia, rationes; et alia requirantur inveniri vel construi, quae ad illa data in relatione praescripta et conditione sint: in Elementis quidem talia invenienda vel construenda proponit in enuntiatione problematum, et, quomodo fieri atque inveniri possint, docet in eorum constructione ac demonstratione, quas enuntiationi subjungit. De Analysi autem, vel de modo, quo ad problematum effectionem ratiocinando perveniri possit, in ipsis Elementis nihil praecipit: plurima vero in eum usum enuntiat ac demonstrat in Libello, quem De Datis (*περι δεδονενων*) inscripsit; qui est antesignanus ceterorum, quos veteres de Analysi geometrica conscripsere, librorum. Is igitur Libellus continet enumeratos et tractatos notabiliores quosdam et frequentiores ejusmodi casuum, cum ex quibusdam datis alia quaedam inveniri posse consequitur; quae deinceps et ipsa data appellat, quod quasi postliminio et per consequens data sint ex illis primitus et per ipsam *ενδεσιν* datis. Quoniam enim in resolvendo aliquo problemate versantem oportet, ubi figuram contemplandam delineavit, non modo eas, quas illa figura habet proprietates, investigare et pernoscere, sed praeterea differentiam illam in figurae partibus, qua aliae datae, aliae quaesitae sunt, in animo habere, et quomodo ab illis ad has viam inveniat, cogitare: ad hanc igitur cogitationem inserviunt illa de Datis theoremata, quae et ipsa Data appellantur.

§. 340.

Quem Datorum usum et notionum ut exemplis aliquot illustremus; resumamus eadem illa Libri primi Elementorum problemata, quorum supra analysin alio modo dedimus: nunc eam per usum Datorum exhibebimus.

El. I, 1. Huic problemati respondebit datum hoc: Data recta, super qua sit triangulum aequilaterum, (sive ipsius basi); dabitur ejusdem etiam vertex. (v. fig. textus.)

Data sit recta A B, super qua triangulum aequilaterum A Γ B: dico, ejus etiam verticem Γ dari. Quoniam enim A Γ aequalis est A B: erit punctum Γ (ut supra pluribus exposuimus) in circumferentia circuli centro A radio A B descripti; hoc est, in circumferentia positione data. Sumta est enim A B data, tam positione scilicet quam magnitudine: ut adeo illius circuli tam centrum A, quam radius A B datus sit: dato autem centro et radio descripti circuli datur et circumferentia positione; quod est manifestum quasi Corollarium Postulati: tertii Elementorum. Et similiter, quoniam B Γ aequalis est B A; erit punctum Γ in alia etiam circumferentia positione data, nempe circuli centro B et radio B A datis descripti. Est ergo punctum Γ intersectio duarum circumferentiarum positione datarum. Sed duarum linearum quarumcumque (sive recta utraque sit, sive circuli circumferentia: ne hic de aliis dicamus; sive una recta, altera circumferentia circularis) positione datarum intersectio quoque positione datur; quod est unum ex Euclidis da-

tis, nempe 25*um* textus graeci; ac per se fere manifestum est, ut demonstratione vix egeat. Ergo etiam punctum Γ datur: quod erat ostendendum.

El. I, 2. Sic in forma Dati enuntiari poterit. Dato puncto A et recta aliqua B Γ; dabitur et recta quaedam puncto dato A adjacens aequalis datae B Γ.

Describatur super juncta A B triangulum aequilaterum A Δ B; dabitur ejus vertex Δ per praecedens. Producantur Δ A, Δ B ad E, Z. Et quia punctum Δ, itemque puncta A, B data sunt; dantur et rectae Δ A, Δ B, seu rectae Δ E, Δ Z positione. Jam sumatur in A E recta A Λ aequalis ipsi B Γ: ea igitur puncto A adjacet; et dico eam datam esse.

Centro enim B radio B Γ descriptus circulus secet B Z in H; et quia centrum B ac radius B Γ datus est, datur et circumferentia ejus positione. Sed et recta B Z positione data est: ergo et illarum intersectio H positione datur, et recta Δ H datur. Porro quia et Δ A aequalis est Δ B, et A Λ aequalis B Γ, hoc est B H: erit et tota Δ Λ toti Δ H aequalis. Ergo punctum Λ jacet in circumferentia circuli centro Δ radio Δ H descripti. Sed haec circumferentia positione data est, quia et centrum Δ et radius Δ H datus. Ostensum est autem etiam rectam Δ E positione datam esse. Quoniam ergo et circumferentia illa et haec recta positione datae sunt; earum quoque intersectio Λ datur; Et datum est punctum A. Ergo et recta A Λ datur, quae adjacet puncto A, et aequalis est B Γ (supp.): quod erat ostendendum.

Datum ad El. I, 3. Datis duabus rectis inaequalibus A B et Γ, si sumtum sit in majori A B punctum aliquod E, quod faciat segmentum ipso et puncto

A interceptum A E aequale datae minori Γ: punctum illud E dabitur.

Per praecedens enim dabitur recta aliqua puncto A adjacens, aequalis rectae Γ; sit A Δ. Et quoniam A E aequalis est Γ (supp.); sed et A Δ aequalis Γ: erit igitur A E aequalis A Δ. Hinc punctum E est in circumferentia circuli centro A radio A Δ descripti; quae quidem positione datur ob centrum A et radium A Δ data. Sed et A B positione data est per hyp. Ergo et punctum E, in quo illa circumferentia et recta A B se intersecant, datur: quod erat ostendendum.

Datum ad El. I, 9. Datum positione angulum rectilineum quae bifariam secat recta, positione dabitur.

Sit angulus B A Γ positione datus, hoc est, rectis B A, A Γ positione datis comprehensus; et ipsum bifariam secet recta A H [supple hoc in fig. text. graeci ut producatur A Z ad H]: dico eam positione dari.

In recta enim A B sumatur punctum quodcumque Δ; et ipsi A Δ aequalis ab A Γ abscindatur A E; jungatur Δ E recta: tum centro Δ intervallo Δ E describatur circulus, secans ipsam A H ad partes ipsius Δ E alias, quam ad quas est punctum A, in puncto Z, et jungantur Δ Z, Z E.

Quoniam punctum A datum est (per supp. vel quod in eo rectae positione datae B A, A Γ concurrunt), et punctum Δ assumtum est pro dato (id enim saepe in hoc genere fit, ut praeter ea, quae per expositionem data sunt, alia quaedam praeterea pro lubitu sumta pro datis usurpentur): data ergo est recta A Δ. Et quum huic aequalis abscissa sit A E a majori A Γ, datur et punctum E (per datum proxime praec.

ad El. I, 3.): ergo et recta Δ E datur, data puncta jungens. Quoniam autem est A Δ aequalis A E, ergo duae Δ A, A Z duabus E A, A Z aequales, et angulus Δ A Z aequalis angulo E A Z (cum recta A H per hyp. bifariam secet angulum B A Γ): per El. I, 4. basis quoque Δ Z basi E Z aequalis est. Sed Δ Z aequalis est Δ E, quia ex centro ejusdem circuli: ergo et E Z aequalis Δ E; et triangulum Δ Z E aequilaterum est. Est autem super data recta Δ E constitutum. Ergo (per Datum ad El. I, 1.) vertex ejus Z datur. Sed et punctum A datum est. Ergo recta A Z seu A H positione datur. q. e. d.

Datum ad El. I, 10. Datae rectae terminatae dabitur et punctum, in quo ea bifariam secatur.

Data sit recta terminata A B, bifariam secta in puncto Δ: dico punctum Δ dari.

Describatur enim super A B triangulum aequilaterum A Γ B, et, quia ipsa A B data est, dabitur ejus vertex Γ (per Datum ad El. I, 1.): unde et rectae Γ A, Γ B positione dabuntur. Junctaque Γ Δ; cum sint duae A Γ, Γ Δ duabus B Γ, Γ Δ aequales; sed et basis A Δ basi B Δ aequalis (quia A B bifariam secta in Δ per hyp.): erit per El. I, 8. angulus quoque A Γ Δ angulo B Γ Δ aequalis. Quoniam igitur duabus rectis B Γ, Γ A positione datis comprehensus angulus A Γ B bifariam secatur recta Γ Δ; ipsa quoque Γ Δ positione datur (per Datum ad I, 9.) Sed et recta A B positione data est (hyp.) Ergo et punctum Δ, in quo illae duae rectae sibi invicem occurrunt, datur: q. e. d.

Datum ad El. I, 11. Datae positione rectae

quae ad angulos rectos ducitur recta in dato in ipsa puncto; positione dabitur.

Sit data recta A B positione, et in ipsa datum punctum Δ, in quo sit recta Γ H illi ad angulos rectos ducta: dico Γ H quoque positione dari. (In fig. text. graec. producatur Γ Z ad H.)

Sumtis enim in A B rectis Γ Δ, Γ E utcumque aequalibus, si unum punctorum Δ, E pro dato accipiatur; reliquum quoque positione datum erit (per Datum ad I, 3.) et hinc recta Δ E data. Tum centro Δ intervallo Δ E describatur circulus, qui rectam Γ H secabit, ut in Z: jungantur Δ Z, Z E. Et quoniam duae Δ Γ, Γ Z duabus E Γ, Γ Z aequales sunt, et angulus Δ Γ Z angulo E Γ Z aequalis (per Def. 10. cum sint ex hyp. recti): per El. I, 4. basis quoque Δ Z basi E Z aequalis erit. Sed Δ Z aequalis est Δ E, quia ex centro ejusdem circuli. Ergo et E Z aequalis Δ E, et triangulum Δ Z E aequilaterum est. Constitutum est autem super data recta Δ E. Ergo et illius vertex Z datur (per Datum ad El. I, 1.) Datum autem est etiam punctum Γ. Ergo recta Γ Z seu Γ H positione data est, q. e. d.

Datum ad El. I, 12. In datam positione rectam lineam e puncto extra ipsam dato demissa perpendicularis, positione et magnitudine dabitur.

Sit recta positione data A B, et punctum extra ipsam datum Γ, e quo ad illam demissa sit perpendicularis Γ Θ: dico Δ Θ positione dari.

In recta A Θ sumatur punctum quodcumque H pro dato, et ab Θ B abscindatur Θ E aequalis Θ H; jungantur H Γ, Γ E; quarum datur H Γ, quia datis punctis H, Γ interjecta est. Jam quia Γ Θ perpendi-

cularis est ipsi A B; erunt anguli Γ Θ A, Γ Θ B aequales, per Def. 10. Et quia H Θ aequalis Θ E; duae ergo H Θ, Θ Γ duabus E Θ, Θ Γ aequales sunt; et angulus H Θ Γ angulo E Θ Γ aequalis est: ergo per El. I, 4. basis Γ H basi Γ E aequalis. Hinc punctum E erit in circumferentia circuli centro Γ intervallo Γ H descripti; qnae circumferentia data erit ob centrum Γ et radium Γ H data. Quare et punctum E, in quo illa rectam positione datam Θ B secat, datum erit, et recta H E datis punctis H, E interjacens, data erit. Itaque (per Datum ad El. I, 10.) datum erit etiam punctum Θ, in quo H E data bifariam secatur, cum aequales sumtae sint H Θ, Θ E. Quare cum et punctum Γ detur; recta Γ Θ prositione et magnitudine dabitur; q. e. d.

Quoniam autem ad compositionem requiritur, ut circulus centro Γ radio Γ H descriptus rectam A B secet in puncto H et in alio praeterea puncto E: id obtinebitur, si primo ad alteras rectae A B partes, quam ad quas est punctum Γ, sumatur aliquod punctum Δ; tum enim circulus centro Γ intervallo Γ Δ descriptus necessario secabit ipsam A B in duobus punctis (v. Chrest. geom. pag. 195. Nro. 20. 1).

D a t u m ad El. I, 22. Si super basi aliqua data constitutum sit triangulum, cujus duo latera duabus rectis datis aequalia sint: ejus vertex et latera positione data erunt.

Sit basis data Z H, super qua constitutum sit triangulum K Z H, habens latus Z K rectae datae Z Δ, et latus H K rectae datae H Θ aequalia; quae rectae in directum ipsi Z H utrimque posita sint: dico punc-

tum K dari, verticem nempe illius trianguli; et rectas Z K, K H, latera illius, positione dari.

Quia enim Z K aequalis est Z Δ; punctum K erit in circumferentia circuli centro Z radio Z Δ descripti, quae positione data erit ob centrum Z et radium Z Δ data. Similiter, quia H K aequalis est H Θ, punctum K erit in circumferentia circuli centro H, radio H Θ descripti, quae item positione data erit ob centrum H et radium H Θ data. Ergo etiam duarum illarum circumferentiarum intersectio data erit, hoc est ipsum punctum K. Et cum puncta Z, H data sint, rectae quoque Z K, K H positione datae erunt, q. e. d.

D a t u m a d E l. I, 23. Data positione linea recta et puncto in ipsa dato; quae ad ipsam in hoc puncto ducitur recta faciens cum ipsa angulum dato angulo rectilineo aequalem, positione data erit.

Sit recta A B positione data, et ad ipsam in dato ipsius puncto A ducta sit recta linea A Θ faciens cum ipsa angulum B A Θ aequalem dato angulo E Γ Δ: dico rectam A Θ positione dari. (In fig. text. graeci produc A Z ad Θ.

A cruribus anguli ad Γ dati abscindantur Γ Δ, Γ E utcumque, quae sumantur pro datis, jungaturque Δ E: tunc ab A Θ, A B abscindantur A Z aequalis Γ Δ, et A H aequalis Γ E, et jungatur H Z. Quoniam igitur duae Z A, A H duabus Δ Γ, Γ E, altera alteri, aequales sunt, et angulus Z A H angulo Δ Γ E aequalis est: erit et basis Z H basi Δ E aequalis per El. I, 4. Et quia rectae Γ, Δ Γ E datae sunt, et punctum Γ: puncta quoque Δ, E data erunt, et recta Δ E data erit. Rursus quia a positione data A B abscissa est A H aequalis datae Γ E; punctum H datum

erit, et ipsa recta A H (per Dat. ad El. I, 3). Super data igitur recta A H constitutum est triangulum A Z H, habens latera duo A Z, Z H duabus datis rectis Γ Δ, Δ E aequalia: ergo (per Dat. prox. praec.) trianguli illius vertex Z datur; unde et recta A Z, seu A Θ positione dabitur; q. e. d.

§. 341.

Jam ad hoc Analyseos genus, quod procedit per Data, hoc est, per Theoremata de Datis, quaedam observare non erit inutile. Ac primo: etsi, quod datum esse concluditur, frequenter sit unum tantum, et non pluribus modis exhiberi possit: tamen et haud raro est, ubi duobus vel forte etiam pluribus modis exhiberi queat: ut adeo datum non oporteat intelligere tale esse, quod usquequaque ita determinatum sit, ut sit unicum tantum sui generis. Datum enim est, quicquid inveniri potest, etsi pluribus forte modis possit. Nam recta quidem data terminata bifariam secari in unico tantum puncto potest; et angulus datus rectilineus unica tantum recta bifariam secari; et in datam rectam infinitam e puncto extra ipsam dato unicum tantum perpendiculum demitti. Sed super data recta triangulum aequilaterum non unum tantum, sed duo describi possunt, alterum ad alteras ipsius partes, et datae rectae in dato ipsius puncto perpendicularis non ad unas tantum, sed etiam ad alteras ipsius partes excitari potest; et super data basi triangulum habens duo latera duabus datis rectis aequalia, si unum ad unas ipsius partes describi potest, alterum quoque ad alteras describi poterit; et angulus ad datam rec-

tam in dato ipsius puncto applicari, qui dato angulo rectilineo aequalis sit, non ad unas tantum illius rectae partes potest, sed ad utrasque.

Innumeras autem solutiones unum duntaxat illorum, quae ex Elementis attulimus, problematum habet, nempe El. I, 2. In hoc enim ad datum punctum poni rectae, quae datae rectae aequales sint, non una aut altera tantum, sed innumerae possunt: quamquam Euclides in illo problemate satis habeat ostendere, unam saltim aliquam poni posse. Quare et, quod illi subjecimus Datum (§. praec.), enuntiandi modo aliquantum differt a ceterorum enuntiationibus. Non enim diximus, Dato puncto si adjaceat recta datae rectae aequalis, eam positione dari; quod non verum esset: neque enim quaelibet dato puncto adjacens datae rectae aequalis, positione quoque datur: sed hoc tantum diximus, Datis puncto et recta dari, hoc est, inveniri posse, rectam aliquam, quae dato puncto adjacens datae aequalis sit. Quodsi similem enuntiandi modum in ceteris adhiberemus, ut esset enuntiatio Datorum

ad El. I, 1. Data recta terminata, dabitur et triangulum aequilaterum super ipsa: vel dabitur punctum, e quo ad illius extrema ductae rectae faciant triangulum aequilaterum;

ad El. I, 3. Datis duabus rectis inaequalibus dabitur et segmentum majoris adjacens uni ejus extremo, aequale minori;

ad El. I, 9. Dato angulo, dabitur et positione recta aliqua, ipsum bifariam secans;

ad El. I, 10. Data positione recta, dabitur et punctum aliquod in ipsa, in quo illa bifariam secetur;

ad

ad El. I, 11. Data positione recta, et in ipsa puncto; positione dabitur recta aliqua in hoc puncto ducenda, quae ipsi ad angulos rectos sit;

ad El. I, 12. Data positione recta infinita, et puncto extra ipsam; positione dabitur recta aliqua ex illo puncto ducenda, quae illi perpendicularis sit;

ad El. I, 22. Data basi et duabus rectis magnitudine datis; dabitur et triangulum super illa, quod latera habeat duabus illis rectis datis sigillatim aequalia; seu dabitur ⊿ punctum extra basim, ad quod ex ejus extremis ductae duae rectae sint duabus datis aequales; si modo ex tribus illis datis binae simul sumtae sint majores tertia;

ad El. I, 23. Data positione recta, et puncto in ipsa; dabitur et positione recta aliqua ex illo puncto ducenda, quae cum ipsa angulum faciat aequalem angulo dato:

haec omnia Data nihil sane amplius dicerent, quam quod ipsa Euclidea enuntiatio cujusque illorum problematum dicit, nempe inveniri posse ea, quae in quoque illorum problematum proponuntur; et sic demonstratio quoque horum Datorum ab Euclidea problematum illorum demonstratione vix verbis differret: Sed alia nimirum fuit nostra Datorum ad illa problemata enuntiatio (§. proc.); nempe, si vim verborum repetamus;

ad I, 1. Si super recta data constitutum sit triangulum aequilaterum; dari ejus verticem; vel dari ejus reliqua duo latera positione;

ad I, 3. Si a majori duarum rectarum inaequalium, abscissum sit segmentum uni ipsius extremo ad-

jacens aequale minori illorum; terminum quoque illius segmenti dari;

ad I, 9. Si angulum rectilineum datum bifariam secet recta, eam positione dari;

ad I, 10. Si data recta terminata in puncto bifariam secta sit, id punctum dari;

ad I, 11. Si datae positione rectae in dato in ipsa puncto recta ad angulos rectos ducta sit: eam positione dari;

ad I, 12. Si in datam positione rectam e puncto extra ipsam dato perpendicularis demissa sit; eam positione et magnitudine dari.

ad I, 22. Si super data basi triangulum constitutum sit habens duo latera duabus datis rectis aequalia: ejus verticem et latera positione dari.

ad I, 23. Si ad datam positione rectam et punctum in ipsa datum ducta sit recta faciens cum ipsa angulum angulo dato aequalem; eam rectam positione dari.

Quorum sic enuntiatorum Datorum quae sit ab illis priori modo enuntiatis Datis differentia; operae pretium erit, aliquanto accuratius investigare, quod id ad Analyseos naturam cognoscendam pertinere videtur.

§. 342.

Ac primo quidem manifesta est haec differentia, quod in priori enuntiandi modo sit Datorum forma, quam Logici dicunt, categorica ut plurimum; in posteriori hypothetica; nempe cum conditione, ut ea res, de qua quaeritur, facta sit; cui conditioni subjunctum est consequens, ut ea vel ipsa detur, vel quaedam,

quae ad illius effectionem pertinent, data sint. Quoniam enim non omne problema possibile est, sed et talia facienda proponere quisquam possit, quae fieri nequeunt idque aut numquam omnino, quomodocumque eae res, quas ille simul datas proponit, se habeant; aut aliquando quidem fieri possint, aliquando vero non possint, pro singulari datarum rerum constitutione et inter se apta vel incongrua habitudine, in iis quidem, quae fieri nunquam possunt, Dato non est locus; etsi Analysi locus est: nam Analysis eo quoque vel maxime inservit, ut si qua impossibilia sint, talia esse arguat ex eo, quod absurdum aliquid vel impossibile ex ipsis consequi ostendat: in iis autem, quae fieri aliquando possunt, aliquando non possunt, pro varia datarum rerum constitutione, Dato omnino locus est; sed id non aliter quam forma hypothetica comprehendi oportet, in hunc modum: si datis his et illis aliud quiddam, quod certum ad illa relationem habeat, factum sit, (sic enim dici oportet, non vero, faciendum sit).; id et ipsum dabitur. Exempli gratia, si super data basi descriptum sit triangulum habens duo latera duabus rectis aequalia: ejus vertex dabitur. Non vero absolute et categorice: super data basi dabitur et triangulum (vel vertex trianguli), quod duo latera habeat duabus datis rectis aequalia; vel: Si super data basi describendum sit triangulum habens duo latera duabus datis rectis aequalia; ejus vertex dabitur. Non sic, inquam: nam nisi basis illa et duae illae rectae datae tales sint, ut binae ipsarum quaelibet simul sumtae majores sint reliqua nec dabitur, nec omnino fieri poterit triangulum. Quamobrem talibus problematis, cum proponuntur, adjungenda est deter-

minatio: ut et Euclidis illi vel potius ei, cui illa respondet, El. I., 22. adjungit determinationem hanc: *Δει δη τας δυο της λοιπης μειζονας ειναι, παντη μεταλαν gavoμενας.* Sed haec in Compositione: Analysis enim non notam supponit Determinationem, sed eam potius, si qua locum habet, invenit. Nam si Analysis quaesitum M vel problema faciendi M ultima conclusione reduxerit ad faciendum N, sic ut N tale sit, quocum vel per quod, et non aliter, etiam M detur: si quidem N absolute sit impossibile; erit et M impossibile, et problema fieri prorsus non poterit: si N semper fieri possit; quia N tale est, per hyp., ut eo cognito M innotescat; M quoque fieri semper potest, seu problema semper possibile est. Si vero N, prout reliquae res datae se habeant, aliquando fieri possit, aliquando non: problema quoque aliquando fieri poterit, aliquando non. Ut si N sit intersectio circuli centro et radio datis descripti cum recta positione data: si ea intersectio propter quandam datarum rerum constitutionem aliquando locum non habeat, problema tunc fieri non poterit: sin vero locum habeat, fieri poterit. Tuncque investigatio, qualiter se habentibus datis rebus, intersectio illa locum habeat, dabit ipsam conditionem, qua problema fieri possit, sive ipsam Determinationem seu *Διορισμον*: cujus rei plurima apud veteres Geometras in eorum reliquis aut recentiorum opera restitutis libris exempla exstant.

§. 343.

Deinde et illud observandum: Compositionem problematis nonnumquam dari posse specialem aliquam,

quae de reliquis ejus solutionibus nihil patefaciat: Analysi autem omnes simul solutiones pariter contineri et indicari: ex quo alia rursus prioris ac posterioris (§. 341). Datorum enuntiandi modi differentia patefiet. Exemplo supra adhibito rem illustramus. In Problemate X. §. 173. (v. fig. ibid.) ostensum est, Dato angulo B A C bifariam secto recta A D, cujus e termino D ad rectam A B ducta sit recta aliqua D E: dari aliam quoque rectam ex D ad rectam A C ductam ipsi D E aequalem: quae scilicet invenitur ab A C abscindendo A F aequalem A E, et jungendo D F. Sed ea solutio problematis, ex D ad A C ducendi rectam aequalem D E, specialis est. Nam si D E sit obliqua ad A B, et minor D A: erit et altera, quae problemati satisfaciat. Analysis autem, seu quod idem est, demonstratio Dati sic enuntiati: „Dato angulo B A C bisecto recta A D, et data e dato puncto D ad A B ducta D E: si ex eodem dato puncto D ad A C ducatur recta aequalis datae D E; ea ipsa quoque positione dabitur:“ ad utramque solutionem pertinebit, cum rem deducat ad circuli centro D radio aequali D E descripti intersectionem cum positione data A C; quae intersectio duplex erit quibusdam casibus, et utrique earum respondebit sua solutio.

§. 344.

Praeterea Analysis hoc prae Compositione habet proprium ac praecipuum, quod ex ipsa proxime peti plerumque potest demonstratio, quae mera compositione non suggeritur, docens, problema pluribus modis non effici posse, quam qui respondent ei, quod est

ultimum in conclusionibus Analyseos, seu ad quod problema ultimo in Analysi reducitur: neque effici posse ullo modo qui habeat aliquid, quod illi conclusioni repugnet. Atque illius rei, quod scilicet Problema non aliis, quam qui ostensi sunt, modis solvi queat, cognitio pertinet ad accuratam problematis tractationem, ideoque ab Apollonio in Libris de sectione rationis, cuivis compositioni subjuncta est demonstratio, non aliam quam eam, quae ostensa est, rectam, vel eas duas, si forte duae sint, solvere problema.

Exemplo rursus sint illa, quae paullo ante consideravimus, primi Elementorum problemata. Jam in problemate El. I, 1. si quaeritur, annon plusquam unum triangulum aequilaterum construi super eadem recta possit ad easdem partes? ex Analysi supra data sic ratiocinaberis. Quum per hanc talis trianguli vertex sit in intersectione duorum circulorum, qui extremis datae rectae ut centris, et ejusdem rectae intervallo describuntur: sequitur, si plura essent triangula, plures fore duorum circulorum intersectiones ad easdem rectae centra jungentis partes: quod fieri nequit per consectarium El. I, 7*mae* (v. Chrestom. geom. pag. 230). Sed ex hac ipsa I, 7*mae* impossibilitas plurum triangulorum inmediate consequitur, sine illorum circulorum interventu.

Ad problema El. I, 9. de angulo dato bifariam secando; unam tantum esse rectam, quae id praestet, etsi magis e propinquo ostendi queat, et fere per se evidens haberi possit: tamen si Analysin vel Demonstrationem Dati supra datam consulas, ex hac sic consequetur. Sint duae, si fieri potest, quae problema solvant, una quidem A Z vel A H, de qua

supra; altera A H′ (figuram facile delineabis): et simili facta constructione, ac supra, qua obtinebatur triangulum Δ Z E aequilaterum, obtinebitur alterum triangulum aequilaterum Δ Z′ E super eadem recta Δ E: quod fieri nequit, per ea, quae modo ad El. I, 1. observata sunt.

Similiter ad El. I, 10. Datam rectam in uno tantum puncto posse bifariam secari; etsi magis immediate demonstrari queat, et pene Axiomatis loco sit: tamen ex Analysi supra data sic quoque elici poterit.

Si praeter punctum Δ sit alterum quoque punctum Δ′, in quo recta A B bifariam secetur, et ex vertice Γ trianguli aequilateri A Γ B ducatur Γ Δ′: ea quoque pariter, ac supra de recta Γ Δ ostensum est, angulum A Γ′ B bifariam secabit. Ergo idem angulus duabus radis Γ Δ, Γ Δ′ bifariam sectus esset: quod fieri nequit, per ea, quae modo ad El. I, 9. diximus.

Ad El. I, 11. Rectae datae A B in dato ipsius puncto non posse duas perpendiculares ad easdem partes duci Γ H, Γ H′: quod immediate per Def. 10. et Ax. 9. ostendi potest; id superiori assumta Analysi sic concludetur. Ut enim ad Γ H triangulum aequilaterum Δ Z E ex superiori Analysi, sic ad Γ H′ triangulum aequilaterum Δ Z′ E super eadem recta Δ E obtinebitur; quod rursus fieri nequit perea, quae dicta sunt ad El. I, 1.

Ad El. I, 12. In eandem rectam A B ex eodem puncto Γ non posse plures demitti perpendiculares; ostenditur proprie ex El. I, 17. Sed sequendo superiorem Analysin sic concludemus: Si sint duae perpendiculares Γ Θ, Γ Θ′: sumto puncto H pro lubitu, eodem, quo supra et ut supra, facta est Θ E : Θ H,

ita nunc facta Θ' E': Θ' H: ostendetur, ut supra L E: Γ H, ita hic Γ E: Γ H. Ergo ex eodem puncto Γ ad eandem rectam A B tres rectae ductae essent inter se aequales; quod fieri nequit per Consectaria El. I, 19 (v. Chrest. geom. p. 312.)

Ad El I, 22. unum tantum esse posse triangulum super recta Z H ad easdem partes, quod satis faciat problematis: per Analysin rursus reducitur ad id, quod una tantum intersectio sit duorum circulorum ad easdem partes rectae centra jungentis: et hoc, ac res ipsa, de qua quaeritur, immediate, ad El. I, 7.

De El. 1, 23. quid opus est dicere? cum palam sit, unam tantum ad easdem rectae datae A B partes esse posse rectam, quae problemati satis faciat.

Sed haec hactenus sufficiant de Datis generatim, et de demonstratione Datorum seu de Analysi problematum, quae illi aequipollet, observasse: progredimur nunc ad ea, quae theorematibus Cap. II. et III., seu problematibus Cap. IV. respondent Data. Quae quidem malumus ad problemata Cap. IV. referre; quod omnino cum problematis arctione nexu, quam cum theorematis cohaerere videantur.

III. Data respondentia Problematis Capitis IV.

§. 345.

Datum ad Probl. IX. §. 173. Si ad duas rectas positione datas et facientes angulum, e dato puncto rectae illum angulum bifariam secantis ductae duae rectae aequalia terminent triangula; et earum una positione data sit: etiam altera positione dabitur. v. Fig. 63.

Sint rectae B A, A C positione datae, facientes angulum B A C, quem bifariam secet A D; e cujus dato puncto D ad illas ductae sint rectae D E, D F, terminantes triangula A D E, A D F aequalia, quarum una D E positione data sit: dico etiam alteram D F positione dari.

Nam per ea, que ostensa sunt Cap. VI. §. 240., erit A F aequalis A E. Datur autem punctum E; quia utraque A B et D E positione data est; duarum autem linearum positione datarum datur et intersectionis vel concursus punctum: ergo hic datur punctum E. Et quia A F aequalis est A E; dabitur et punctum F (per Datum ad El. I, 3. supra propositum.) Itaque et recta D F positione datur (per Datum respondens postulato primo: quod nempe recta per data duo puncta ducta positione data sit).

Et addi potest, utramque duarum ductarum etiam magnitudine datam esse: nempe et D E, quia duobus punctis datis D, E interjacet; et D F, quia duobus punctis datis D, F.

Similiter ostendentur et sequentia:

Datum ad Probl. XXI. §. 177. Si ad datam positione rectam e puncto in recta ipsi perpendiculari dato, et ad utrasque hujus perpendicularis partes, ductae duae rectae aequalia terminent triangula; et una earum positione data sit: etiam altera positione dabitur.

Datum ad Probl. XXX. §. 180. Si ad concursum duarum rectarum positione datarum et angulum in concursu facientium, ex puncto extra hunc angulum dato ducta recta, aequales cum rectis illis positione datis faciat angulos; tum ex eodem illo puncto

ad easdem ductae aliae duae rectae, ad utrasque prioris ductae partes, aequalia terminent triangula; et ipsarum una positione data sit: etiam altera positione dabitur.

Datum ad Probl. XXXVIII. §. 182. Si in duas rectas positione datas recta linea in datis ipsarum punctis incidat faciens aequales cum ipsis angulos alternos; et utrumque horum alternorum angulorum subtendat recta ex uno punctorum incidentium ad oppositam ipsi rectarum positione datarum ducta, et hae subtendentes aequalia terminent triangula: si earum una positione data sit; etiam altera positione dabitur.

Datum ad Probl. LI §. 186. Si ad datam rectam in duobus ejus extremis et ad easdem partes duae rectae positione datae insistant sub aequalibus angulis, et ex utroque prioris extremo ad rectam in altero extremo insistentem ducta sit recta, et eae duae rectae aequalia terminent triangula: si earum una positione data sit; altera etiam positione dabitur.

Datum ad Probl. LXIII. §. 190. Si duae rectae angulum facientes positione datae sint, et in ipsa inde ab anguli vertice aequalia abscissa sint segmenta; et ex horum terminis ad oppositas rectas ductae rectae aequalia terminent triangula: si horum una positione data sit; etiam altera positione dabitur.

Et similia erunt Data ad Probl. LXXVIII. §. 194., ad Probl LXXXVI. §. 196, et Probl. XC. §. 197, ad Probl. XCIV. §. 198, ad Probl. CII. §. 200., et Probl. CVI. §. 201.

Datum ad Probl. CIX, b. §. 203. Si ad rectam aliquam positione datam ex duobus punctis extra ipsam datis duae rectae positione datae aequales, et

sub aequalibus angulis inclinatae sint; et rursus ex iisdem punctis aliae duae rectae, ad partes angulorum dictorum, ad rectam priorem positione datam ductae aequalia terminent triangula: si earum una positione data sit; etiam altera positione dabitur.

Et simile erit Datum ad Probl. CX, b. §. 203. Sed haec omnia comprehenduntur sub hoc Dato:

Si duo triangula latus lateri, et angulum angulo, qui est ad verticem datum, aequalia habeant, et ipsa inter se aequalem habeant aream; et sit utrumque dictorum laterum aequalium positione et magnitudine datum, et unius trianguli latus reliquum ac basis positione data sint: reliqui quoque basis positione dabitur. Quibus etiam hoc addi potest: Et utrumque latus reliquum, et utraque basis magnitudine data erunt. Fig. 61.

Sint triangula A B C, D E G habentia latus A B lateri D E, et angulum B A C angulo E D G, qui sunt ad vertices datos A, D, aequalia; et ipsa inter se aequalis areae; et sint latera aequalia A B, D E positione ac magnitudine data; unius autem latus reliquum A C ac basis B C positione data sint: erit et alterius basis E G positione data. Ac porro utrumque latus reliquum A C, D G, et utraque basis B C, E G positione data erunt.

Quoniam enim B A, A C positione dantur; datur angulus B A C, et ipsi aequalis E D G. Et quia E D positione datur, datur et D G, quae cum ipsa datum angulum facit, positione. Rursus quia B C positione datur (supp.), sed et A C (per ostensa): datur et punctum C, in quo illae concurrunt, positione. Et quia punctum quoque A datum est (hyp.), et punc-

tum B propter A B magnitudine ac positione datam: rectae quoque A C, B C magnitudine datae erunt. Quoniam autem triangula A B C, D E G latus A B lateri D E, et angulum B A C angulo E D G aequalem habent, et ipsa inter se aequalia sunt: erit etiam (per §. 240.) A C aequalis D G. Et cum A C magnitudine data sit, D G quoque magnitudine dabitur. Cumque et positione data sit, et extremum ejus D datum sit; alterum quoque extremum G datum erit. Hinc et E G positione ac magnitudine data erit: Quae erant ostendenda.

Paullo aliter: Dato triangulo, et data positione recta aliqua cum angulo in uno ipsius extremo dato adjacente, quae aequalis sit uni trianguli lateri cum adjacente angulo: si ex altero illius rectae extremo intra dictum angulum ducta sit recta terminans triangulum aequale dato triangulo: erit haec ducta recta positione data.

§. 346.

Proxime ex ipsa El. I, 4. consequitur hoc Datum:

Si trianguli latera duo et basis data sint, et alterum triangulum habeat latera duo duobus illius lateribus, alterum alteri, aequalia, et angulum his comprehensum aequalem angulo illis comprehenso: erit et basis posterioris trianguli magnitudine data. Quodsi unum ipsius latus cum uno extremo positione quoque datum sit: erit et alterum latus et basis positione data.

Et ex theoremate §. 240. hoc Datum:

Si trianguli duo latera data sint, et ei alterum area aequale sit, et latus lateri, et angulum adjacentem

angulo, qui dictis illius lateribus comprehenditur, aequalem habeat: etiam reliquum latus dicto angulo adjacens magnitudine datum habebit.

Et ex Theoremate §. 263. hoc Datum:

Si trianguli tria latera data sint, et alterum habeat duos angulos duobus illius angulis, alterum alteri, aequales, et latus lateri aequale, quod aequalibus angulis adjacet: singula latera data habebit.

Hujus applicationem sistent haec, quae proxime sequuntur, Data.

§. 347.

Datum ad Probl. X. §. 173. Si ad duas rectas positione datas et facientes angulum, e dato puncto rectae illum angulum bifariam secantis duae rectae sub aequalibus ad ipsam angulis internis ductae sint, et earum una ei, ad quam ducta est, in dato puncto occurrat: etiam altera ei, ad quam ducta est, in dato puncto occurret. Fig. 63.

Datae positione sint rectae B A, A C, facientes angulum B A C, quem bifariam secet recta A D: cujus e puncto dato D ad illas ductae sint rectae D E, D F sub aequalibus ad illam angulis internis A D E, A D F; et una earum D E occurrat ei, ad quam ducta est, A B, in dato puncto E: etiam altera D F ei, ad quam ducta est, A C in dato puncto F occurret.

Erit enim A F aequalis A E per §. 263: et cum detur punctum E, dabitur et punctum F.

Datum ad Probl. XXII. §. 177. Si ad datam positione rectam e puncto in recta ipsi perpendiculari

dato et ad utrasque hujus perpendicularis partes ductae sint duae rectae facientes aequales cum ipsa perpendiculari angulos; et earum una in datum rectae positione datae punctum incidat: etiam altera in datum illius punctum incidet.

Datum ad Probl. XXXII. §. 180. Si ad concursum duarum rectarum positione datarum et angulum facientium in concursu. e puncto extra hunc angulum dato ducta recta aequales cum rectis illis positione datis faciat angulos; tum ex eodem illo puncto ad easdem ductae aliae duae rectae, ad utrasque prioris ductae partes, aequales cum ipsa faciant angulos; et ipsarum una uni positione datarum in dato puncto occurrat: etiam altera alteri in dato puncto occurret.

Datum ad Probl. XXXIX. §. 182. Si in duas rectas positione datas recta linea incidat in datis ipsarum punctis, faciens aequales cum ipsis angulos alternos; et utrumque horum alternorum subtendat recta ex uno punctorum incidentiae ad oppositam ipsi rectam positióne datam ducta, et eae subtendentes cum incidente faciant aequales angulos; si earum una uni rectarum positione datarum in dato puncto occurrat: etiam altera alteri in dato puncto occurret.

Datum ad Probl LII. §. 186. Si rectae datae in duobus ejus extremis et ad easdem partes insistentes duae rectae concurrant in puncto dato: aliae duae rectae. in iisdem extremis et ad easdem partes insistentes priori rectae sub angulis prioribus aequalibus in alteris extremis, item in dato puncto concurrent.

Datum ad Probl. LXIV. §. 190. Si duae rectae angulum facientes, positione datae sint, et in ipsis segmenta inde ab anguli vertice abscissa sint aequa-

lia; et ex horum terminis ductae sint intra angulum duae rectae sub aequalibus ad dicta segmenta angulis: si earum una occurrit uni rectae positione datae in dato puncto; etiam altera alteri in dato puncto occurret.

Et similia habebuntur Data ad Probl. LXXIX. §. 194., ad Probl. LXXXVII. §. 196., Probl. XCI. §. 197., Probl. XCV. §. 198., Probl. CIII. §. 200,, Probl. CVII. §. 201.

Datum ad Probl. CIX., c. §. 203. Si ad rectam aliquam positione datam ex duobus punctis extra ipsam datis duae rectae positione datae aequales et sub aequalibus angulis inclinatae sint; et rursus ex iisdem punctis aliae duae rectae ad partes dictorum angulorum ductae sint sub aequalibus ad duas dictas inclinatas angulis, quarum una priori positione datae in dato puncto occurrat: etiam altera eidem in dato puncto occurret.

§. 348.

Praemisso, quasi Lemmate, hoc Dato: Si recta terminata positione data secetur in puncto bifariam: id punctum positione datum erit, (de quo supra ad El. I, 10. §. 340.): porro haec respondebunt Data theorematis §§. 257. 280.

Theorematí §. 257. 2o. hoc Datum: Si rectae terminatae positione datae in duobus ipsius extremis et ad easdem aut diversas partes insistant duae rectae aequales et sub aequalibus angulis, et ab earum terminis datis ad punctum aliquod prioris datae, ductae duae rectae aequaliae terminent triangula: id punctum positione dabitur.

Theoremati §. 280. 2o. hoc Datum: Si rectae terminatae positione datae in ipsius extremis, sive ad easdem sive ad diversas partes, insistant duae rectae aequales, et sub angulis aequalibus, et ab earum terminis datis ad punctum aliquod in priori sumtum ductae duae rectae comprehendant aequales cum insistentibus angulos; id punctum positione dabitur.

§. 349.

Jam Problemati XI. §. 173. hoc respondebit Datum: Si ad duas rectas positione datas et angulum facientes e dato puncto rectae illum angulum bifariam secantis ductae sint duae rectae, quae cum illis aequales faciant angulos internos; et earum una positione data sit: altera quoque positione dabitur. Fig. 63.

Datae sint positione duae B A, A C, et angulum ab iis comprehensum bifariam secet recta A D, e cujus dato puncto D ductae ad rectas A B, A C duae D E, D F faciant cum illis angulos internos D E A, D F A aequales; et positione data sit recta D E: dico, etiam D F positione dari.

Hujus demonstratio similis erit ac praecedentium ad eandem figuram (§§. 345. 347.), si ostensum fuerit, esse A F aequalem A E: Sed hoc ut ostendatur, opus est El. I, 16. aut I, 26 part. 2*a*., quarum usum quia in hac scriptione non supponimus; Datum quoque illud et alia, quae pluribus sequentibus problematibus Cap. V*ti* responderent huc pertinentia, hoc loco praetermittimus.

§. 350.

Problemati autem VIII. §. 173. hoc respondebit Datum: Si ad duas rectas positione datas et angulum facientes

facientes e dato puncto rectae illum angulum bifariam secantis ductae sint duae rectae inter se aequales; et earum una positione data sit (vel ei, ad quam ducta est, in dato puncto occurrat): etiam altera positione data erit (vel ei, ad quam ducta est, in dato puncto occurret). *Fig. 68.*

Ceteris ut in §. praec. manentibus, sint rectae D E, D F inter se aequales; et sit D E positione data (vel ipsi A B occurrat in dato puncto E): etiam altera D F positione data erit (vel ipsi A C occurret in dato puncto F).

Hujus autem demonstratio talis, quae similis sit demonstrationibus §§ 345. 347.. locum non habet, propterea quod hic non obtinet, ut A F necessario sit aequalis A E. Revera enim ex D ad A C non una tantum, sed duae rectae aequales D E, si modo D E non sit perpendicularis ad A B, duci possunt. Sed tamen hoc quoque casu recta D F dici potest dari secundum Euclidis loquendi modum in libro Datorum, etsi non uno tantum modo detur vel duci possit, sed duobus. Hujus autem demonstratio conformis ei quam textus graecus exhibet, demonstrationi Eucl. Dat. prop. XXXI. sic instituetur. Quoniam D E positione data ad positione datam A B ducta est, itaque punctum E datur (vel punctum E immediate datur, per hyp); et punctum D datum est: dabitur et recta D E magnitudine; quare et ipsi aequalis D F magnitudine datur. Hinc punctum F jacet in circumferentia circuli centro D radio aequali D E descripti, quae quidem data est ob centrum D et radium D E data: sed idem punctum F est in recta positione data A C: itaque punctum F, cum sit duarum linearum positione datarum

intersectio, positione dabitur (per Eucl. Dat. prop. XXV. text. graec.): ergo et recta D F positione datur.

Sed hoc Datum subjacet generaliori huic Dato:

Si duae rectae positione datae angulum faciant aequalem angulo ad verticem trianguli dati, et ab una earum abscissum sit segmentum aequale uni lateri illius trianguli: si ex hujus segmenti termino ad alteram positione datam ducta sit recta aequalis basi trianguli; ea et ipsa positione dabitur (et alteri rectae positione datae in dato puncto occurret, et hinc segmentum quoque ejus magnitudine datum abscindet). Etsi quibusdam casibus si de ea, quam ductam diximus, non ut de ducta, sed ut de ducenda agatur; ipsa duplex esse possit seu duplici modo duci possit; et punctum, in quo ei, ad quam ducitur, occurrat, duplex esse; et hinc segmentum quoque ejus, quod ab hac abscindit, duplex. Sed haec distinctio ad Problema, non ad Datum, ac pariter ad Compositionem, non ad Analysin pertinet. (Cf. observata supra §. 342.)

Cujus generalioris Dati aliae applicationes respondentes Problematis Capitis IV*ti* XX. §. 177., XXIX. §. 180., XXXVII. §. 182., L. §. 186., LXII. §. 190., LXXVII. §. 194., LXXXI. §. 195., LXXXV. §. 196, XCIII. §. 198., CI. §. 200., CV. §. 201, CIX, a. et CX, a. §. 203; respondentia nempe hisce Problematis Data proponi possent; sed haec relinquimus.

C A P U T X.

Exhibet Porismata et Loca nonnulla, ad figuras in praecedentibus consideratas pertinentia. Praemittuntur aliqua de Porismatis et Locis generatim.

§. 351.

Etsi mirum fortasse cuipiam videatur, quis in hac scriptione, quae de rebus maxime elementaribus agat, locus esse possit de Porismatis dicendi, cum cogitaverit id, quod Pappus de Porismatis Euclidis dicit, „ea „esse collectionem artificiosissimam multarum rerum, „quae spectant ad Analysin difficiliorum et generalium „problematum;“ tamen is, si consideraverit eam Porismatum definitionem, quam dedit Rob. Simson in Operibus Reliquis editis Glasguae 1776., facile desinet mirari, etiam in simplicissimis et maxime elementaribus earum rerum, quae subjectae sunt contemplationi geometricae posse Porismatibus Locum esse. Apponemus autem connexionis causa totum

illum locum, in quo Rob. Simson, quid sit Theorema, quid Problema, Datum, Porisma, Locus, deinceps definit.

Sunt igitur ejus hac, quae sequuntur,

§. 352.

Definitiones.

1. „Theorema est propositio, in qua aliquid proponitur demonstrandum."

2. „Problema est propositio, in qua aliquid proponitur construendum vel inveniendum."

3. „Datum sive Propositio de Datis, est theorema, in quo proponitur demonstrare, aliquid datum esse (secundum Definitiones Datorum Euclidis), quod propositam quandam relationem habeat ad ea, quae ex hypothesi data sunt."

„Datum etiam in forma problematis enuntiari potest; si nimirum ea, quae data esse demonstranda sunt, invenienda proponuntur. Quod si fiat: demonstratio Dati ut theorema propositi Analysis erit problematis; Compositio autem Analysi respondens erit constructio et demonstratio problematis."

4. „Porisma est propositio, in qua proponitur demonstrare: rem aliquam vel plures datas esse, cui vel quibus, ut et cuilibet ex rebus innumeris, non quidem datis, sed quae ad ea, quae data sunt, eandem habent relationem, convenire ostendendum est affectionem quandam communem in propositione descriptam."

(Huic Simsoni Definitioni b. Pfleiderer haec adscripsit in Schedis suis: Porisma est propositio exi-

gens, ut demonstretur: rem aliquam vel plures inveniri posse, cui vel quibus, ut et cuilibet ex rebus innumeris, non quidem determinatis, sed quae juxta certam legem praescriptam assumuntur, convenire ostendendum est affectionem etc.).

„Porisma etiam in forma problematis enuntiari potest; si nimirum ea, quae demonstranda sint, invenienda proponuntur.“

5. „Locus est propositio, in qua propositum est, datum esse demonstrare, vel invenire, lineam aut superficiem, cujus quodlibet punctum; vel superficiem, in qua quaelibet linea data lege descripta, communem quandam habet proprietatem in propositione descriptam.“

„Unde patet, quod Pappus affirmat: Locos speciem esse Porismatis; et communis affectio, quae de punctis aut lineis hisce demonstranda proponitur, est: ea omnia sita esse in una quadam linea aut superficie, quae quidem invenienda est.“

§. 353.

Idem fere, quod illa definitio Porismatis, dicit ea, quam postea Stewart dedit in Commentatione coram Regia Societate Edinburgensi recitata: „Porisma esse propositionem, quae asserat inveniri posse unam aut plures conditiones theorematis indeterminati; hoc est, talis, quod enuntiet relationem quandam certam inter quantitates aliquas determinatas et alias tam magnitudine quam numero indeterminatas.“

Post quem Playfir brevius etiam sic: „Porisma esse propositionem, quae asserat inveniri posse conditiones, quibus problema aliquod fiat indeterminatum

seu innumerarum solutionum capax. (Transact. Soc. Edinb. Vol. III 1794.) Cf. Von Porismen, in Kaestners Geom. Abhandlungen, 1. Samml. 9. Abhandlung.

§. 354.

Jam quod diximus, Porismatibus ex Simsoni Definitione, pro qua et reliquas modo allatas ponere possumus. locum esse posse in simplicissimis quibusque, et quae principiis proximae sint, rebus geometricis: ejus rei exempla aliquot afferamus.

Ex Elem. Lib. I. Def. 15. et Postul. I. consequitur: Data recta aliqua terminata, dari vel inveniri posse lineam aliquam talem, ad quam ab uno illius rectae extremo ducta recta quaecunque aequalis sit illi rectae datae. Quod quidem enuntiatum formam habet Porismatis secundum Simsoni definitionem. Et linea quidem illa, quam dictum est dari vel inveniri posse, est circumferentia circuli dicto datae rectae extremo et ejusdem intervallo descripti. Jam huic lineae et cuilibet ex rectis innumeris, quae a dicto extremo ad illam lineam ducuntur, hoc convenit, ut harum ductarum quaelibet sit aequalis datae rectae: et ea est communis affectio innumerarum illarum rectarum.

Et in forma Loci enuntiabitur idem sic: Dato puncto et data recta linea ipsi adjacente, inveniri poterit Linea, in qua sita sint extrema (seu quae Locus sit extremorum) omnium rectarum ex dato puncto ductarum rectae illi datae aequalium.

Hujus conversa propositio, quae consequitur assumta El. III, 1*a*, item porisma erit, hoc modo: Dato positione circulo, dabitur seu inveniri poterit punctum

in ipsius plano situm, et magnitudo alicujus rectae, sic ut ex puncto inveniendo ductae ad circumferentiam illius circuli rectae quaecumque aequales sint illi rectae inveniendae. Nempe punctum quidem inveniendum erit centrum circuli dati; recta vero invenienda erit una quaecumque earum, quae ex illo centro ad circumferentiam ducuntur.

Et ad El. I, *2am* poni potest Porisma hoc: Dato puncto A, et recta BΓ data, quae non in illo puncto terminetur, dabitur positione circulus, ad cujus circumferentiam ductae ex dato puncto A rectae quaecumque sint datae rectae BΓ aequales. Itaque rursus Locus est, seu propositio localis.

§. 355.

Nunc ad nonnullas earum figurarum, ad quas in superioribus consideravimus theoremata propositionis El. I, *4tae* consectaria, et iis respondentia problemata ac Data, ad has igitur Porismata etiam aliquot proponemus cum Analysi et Compositione. Et compositio quidem plerumque per El. I, 4. conficitur: Analysin autem, etsi ea passim etiam propositiones El. I, 8 et *26ae* part. *2am* supponat, quas in hac scriptione huc usque ad demonstrandum nusquam adhibuimus, tamen nolumus praetermittere, ne primaria pars tractationis Porismatum in his exemplis deesset. Pro exemplis ergo damus sequentia.

Porismata ad aliquot figuras supra consideratas pertinentia et primum ad figuram Problematum VIII — XI. Cap. IV. §. 173.

§. 356.

Porisma I. Dato angulo rectilineo B A C bifariam secto recta A D, et in una rectarum ipsum comprehendentium A B dato puncto E: inveniri poterit (seu datum erit) in ipsarum altera A C punctum aliquod tale, ut ex ipso et ex puncto E ad rectae A D punctum quodlibet ductae binae rectae faciant cum ipsa A D angulos internos aequales.

Fig. 140.

Analysis. Sit punctum in A C inveniendum F; et sumatur in A D punctum quodcumque G: junctis igitur rectis E G, F G, erunt anguli A G E, A G F aequales, quos nempe ductae ex E et F ad punctum aliquod ipsius A D rectae cum ipsa A D faciunt. Sed et anguli E A G, F A G aequales sunt (per hyp), cum A D bifariam secet angulum B A C. Ergo cum sint duo anguli E G A, G A E duobus F G A, G A F aequales, alter alteri, et latus A G aequalibus angulis adjacens commune: per Theorema §. 263. seu El. I, 26. part. 1. erit et A E aequalis A F. Ergo quoniam data sunt puncta A, E et recta A C positione: dabitur et punctum F (per Datum ad El. I, 3. §. 340.).

Compositio. Rectae A E aequalis ab A C abscindatur A F: et erit F punctum id, quod inveniendum erat. Nam sumatur in A D punctum quodcumque G, et jungantur E G, F G: Et quia duae E A, A G duabus F A, A G aequales sunt, et angulus E A G angulo F A G, erit et angulus A G E angulo A G F aequalis, per El. I, 4. Et similiter ostendetur, si pro puncto G aliud quodcumque rectae A D punctum sumatur, ductas ad ipsum ex E, F rectas facere cum A D angulos internos aequales: q. e. d.

Porisma II. Locus. Datis duabus rectis aequalibus BA, AC angulum facientibus in A: inveniri poterit (seu dabitur positione) recta per punctum A transiens talis, ut ad quodlibet ipsius punctum ductae ex B et C binae rectae, angulos internos cum ipsa aequales faciant. *Fig. 141.*

Analysis. Sit recta invenienda AD: ergo sumto in ea puncto quocumque E, et ductis duabus BE, CE, erunt anguli BEA, CEA aequales. Rursus sumto alio in ipsa puncto e, et ductis Be, Ce, erunt et anguli BeA, CeA aequales; hinc per El. I, 13. anguli quoque qui ipsis deinceps sunt, BeE, CeE aequales erunt. Quoniam igitur duo anguli BEe, EeB duobus CEe, Eec, aequales sunt, et latus adjacens Ee commune: erit etiam (per §. 263. vel El. I, 26. part. 1.) BE aequalis CE. Ergo sunt duae BE, EA duabus CE, EA aequales, et angulus BEA angulo CEA; hinc per El. I, 4. etiam angulus BAE angulo CAE aequalis erit; ergo recta AD angulum datum BAC bifariam secat, itaque (per Datum ad El. I, 9. §. 340.) positione datur.

Compositio Bifariam secetur angulus BAC recta AD; ea erit, quam invenire oportuit. Sumto enim in ipsa puncto E quocumque, et junctis BE, CE rectis, erit angulus BEA angulo CEA aequalis (per El. I. 4) Et similiter se habebit de quovis alio sumto in AD puncto, ut ductae ad ipsum ex B, C rectae faciant cum AD angulos aequales.

Porisma III. Datis positione duabus rectis BA, AF facientibus angulum in A; BA quidem terminata in dato puncto B, AF vero infinita: inveniri poterit (seu dabitur) punctum in AF, et po- *Fig. ead.*

sitio rectae per A transeuntis, sic ut ad hujus rectae punctum quodlibet ductae binae rectae ex puncto dato B et ex puncto inveniendo in AF, angulos internos cum illa aequales faciant.

Differt a praecedente, defectu unius dati et excessu unius inveniendi. Nam illic punctum C datum erat, sic ut recta AC aequalis esset AB: hic vero punctum illud datum quidem non est, in recta autem AF positione data situm. Et Analysis cum illius Analysi maxima ex parte congruet.

Sit enim punctum in AF inveniendum C, et invenienda recta per A transiens AD: et ceteris ut illic factis, ostendetur ut illic, duas rectas BE, EA duabus CE, EA aequales esse, et angulum BEA angulo CEA aequalem. Hinc per El. I, 4. basis quoque BA basi AC aequalis erit, et angulus BAE angulo CAE aequalis. Hinc ob datum punctum B et rectam AF positione, punctum quoque C datum erit, et ob datum angulum BAC recta quoque ipsum bifariam secans AD positione data erit. Et componitur, ab data positione AF abscindendo AC aequalem datae AB; et angulum BAC bifariam secando recta AD: quae erit recta invenienda, et C punctum inveniendum. Demonstratio eadem quae in praec.

Porisma IV. Datis positione duabus rectis BA, AD facientibus angulum in A; BA quidem terminata in dato puncto B, AD vero infinita: inveniri potest (seu dabitur) ad alteras ipsius AD partes, quam ad quas est B, punctum tale, ut ex ipso et ex puncto B ductae lineae rectae ad quodlibet ipsius AD punctum faciant cum AD aequales angulos.

Differt a Porismate I. in eo, quod illic punctum inveniendum erat in data positione recta A C, faciente cum A D angulum aequalem angulo B A D, quae hypothesis hic omittitur. Ceterum Analysis a praecedentibus non multum differet.

Sit enim punctum inveniendum C; et jungatur A C. Ductisque ad puncta quaelibet E, e in A D sumta rectis B E, E C, et B e, e C; ostendetur, ut in praecedenti, B A aequalis A C, et angulus B A E angulo C A E aequalis. Hinc cum sit angulus B A D datus, recta A C positione dabitur (per Datum ad El. I, 23. §. 340.); et quia A C aequalis est datae A B, punctum quoque C dabitur.

Et componetur ad rectam D A applicando angulum D A C aequalem angulo B A D (per El. I, 23.), et sumendo A C aequalem A B. Demonstratio eadem, quae in praec.

Porisma V. Locus. Datis positione duabus rectis aequalibus B A, A C, facientibus angulum in A; inveniri poterit (seu dabitur) positio rectae alicujus talis, ut ad ipsius punctum quodcumque ductae ex B, C binae rectae faciunt angulos cum ipsa internos aequales. *Fig. 142.*

Differt a Porismate II. defectu unius conditionis: illic enim conditio adjecta erat, ut invenienda recta per punctum A transeat: quae conditio hic praetermittitur; et in Analysi ostendetur, necesse esse rectam inveniendam per punctum A transire.

Sit enim recta invenienda D d, et sumtis in ipsa duobus punctis E, e utrumque, et junctis B E, C E rectis, itemque B e, C e; erunt igitur per hyp. anguli B E D, C E D aequales, ut et B e d, C e d ae-

quales. Unde ut in Analysi Porism. II. ostendetur BE aequalis CE. Jam si recta Dd non transeat per punctum A; ducatur EA, quae diversa erit ab Ed: et quia BE aequalis est CE per ostensum, ergo duae BE, EA duabus CE, EA aequales; et basis BA basi CA aequalis: erit (per El. I, 8.) angulus BEA angulo CEA aequalis, ergo major angulo Ced; et a fortiori angulus BEd major angulo CEd. Sed et aequalis est angulus BEd angulo CEd (per hyp.): quae repugnant. Non ergo recta Dd non transibit per A; transit igitur. Et quia duae BA, AE duabus CA, AE aequales sunt, et basis BE basi CE: erit et (per El. I, 8.) angulus BAE aequalis CAE; ergo recta AE seu Dd angulum datum BAC bifariam secat; itaque positione dabitur. Et Compositio est eadem quae Porismatis II.

§. 357.

His hactenus Porismatis communis erat hypothesis, ut ad rectae alicujus puncta quaelibet ductae ex punctis duobus ad diversas illius partes sitis binae rectae facerent aequales cum illa angulos internos: Nunc hypothesis sumatur, ut binae illae rectae inter se aequales sint. Ad hanc hypothesin igitur erit

Porisma VI. (respondens Porismati I.) *Fig. 143.* Dato angulo rectilineo bifariam secto recta AD, et in una rectarum ipsum comprehendentium AB dato puncto E: inveniri poterit (seu datum erit) in altera AC punctum aliquod tale, ut ex ipso et ex puncto E ad rectae AD punctum quodlibet ductae binae rectae sint inter se aequales.

Analysis. Sit punctum in AC inveniendum F: et in recta AD sumto puncto quocumque G, junctae EG, GF erunt aequales: similiterque sumto alio puncto g, erunt Eg, gF aequales. Hinc cum sint duae EG, Gg duabus FG, Gg aequales, et basin Eg basi Fg aequalis: erit angulus EGg angulo FGg aequalis (per El. I, 8.). Hinc rursus cum sint duae EG, GA duabus FG, GA aequales, et angulus EGA angulo FGA (per ostensa): erit (per El. I, 4.) basis EA aequalis basi AF. Et quia datum est punctum E, ut et punctum A, et recta AC positione: dabitur et punctum F; quod erat inveniendum.

Sed vides in hac Analysi nusquam usurpari hypothesin, quod recta AD bifariam secet angulum BAC: itaque ea non necessaria est in conditionibus Porismatis: sed Analysis modo tradita inserviet ad haec duo, quae jam subjungimus, proxima Porismata investiganda.

Porisma VII. (respondens superiori Porism. IV.) Datis positione duabus rectis BA, AD facientibus angulum, et in earum una BA dato puncto E: inveniri poterit ad alteras reliquae AD partes punctum alterum, ex quo et ex dato puncto E ad quodlibet rectae positione datae infinitae AD punctum ductae binae rectae sint inter se aequales. *Fig. ead.*

Sit enim rursus punctum F inveniendum, et jungatur AF: et ceteris ut modo factis, ostenditur EA aequalis AF, et praeterea angulus EAG angulo FAG aequalis (per eand. El. I, 4.). Et quia datus est angulus EAG seu BAD, datur et ipsi aequalis FAG: et cum AG vel AD positione data sit, AF quoque positione dabitur; et quia aequalis est datae AE, punc-

tum F dabitur. Et manifesta est compositio; nempe ut fiat angulus D A C aequalis angulo B A D (per El. I, 23.), et ab A C abscindatur A F aequalis A E. Et manifesta erit demonstratio per El. I, 4.

Fig. ead. Porisma VIII. (respondens superiori Por. III.) Datis positione duabus rectis B A, A C, et in earum una BA puncto E: inveniri poterit punctum quoddam in altera A C, et positio rectae per A transeuntis, sic ut ad hujus rectae puncta quaelibet ductae ex puncto dato E et ex puncto in A C inveniendo binae rectae sint inter se aequales.

Sit enim punctum in A C inveniendum F, et recta, cujus positio invenienda, per A transiens A D: et ceteris ut prius factis, rursus demonstrabitur A E aequalis A F, et simul angulus E A G aequalis angulo F A G. Hinc et punctum F, et recta A D positione datur. Et componetur, abscindendo ab A C rectam A F aequalem A E, et bifariam secando angulum B A C recta A D. Et demonstratio manifesta est per El. I, 4.

Quodsi datis duobus punctis E, F, invenienda sit positio rectae A D transeuntis per A; ut sit

Fig. 141. Porisma VIII. Locus: (respondens superiori Por. II.) Datis duabus rectis E A, A F aequalibus, facientibus angulum; inveniri poterit positio rectae transeuntis per A, ad cujus puncta quaelibet ductae binae ex E, F rectae sint inter se aequales;

Analysis haec erit: Sit invenienda recta A D, et in ea sumatur punctum G quodcumque: ductae igitur E G, F G aequales erunt. Sed et E A, A F aequales (hyp.) Quoniam ergo duae E A, A G duabus F A, A G aequales sunt, et basis E G basi F G aequalis: erit

et angulus EAG angulo FAG aequalis (per El. I, 8.). Ergo recta AD bifariam secat angulum datum EAF; itaque positione datur. Et manifesta est Compositio.

P o r i s m a X. (respondens superiori V*to.*) L o c u s. (vid. fig. ad Por. V.) Datis positione duabus rectis aequalibus BA, AC, facientibus angulum in A; inveniri poterit positio rectae alicujus talis, ut ad ipsius punctum quodcumque ductae ex B et A binae rectae sint inter se aequales. *Fig. 142.*

Sit recta invenienda Dd: in hac igitur sumto utlibet puncto E, junctae BE, EC aequales erunt, similiterque sumto utlibet puncto e, junctae Be, eC aequales; et hinc per El. I, 8. angulus BEe aequalis erit angulo CEe. Sed juncta AE, per eandem El. I, 8. est et angulus BEA angulo CEA aequalis. Itaque (similiter ac ad Porism. V. ostensum est) recta Ee cum recta EA coincidit, hoc est, recta Dd per ipsum punctum A transit; ac praeterea (per eandem El. I, 8.) angulum BAC bifariam secabit, ergo positione data erit. Et manifesta est compositio.

A l i a A n a l y s i s. Sit recta invenienda Dd, et in ea sumatur utcumque punctum E, et jungantur BE, CE; porro jungatur recta BC, cui Dd occurrat in puncto e. Et per hypothesin, erunt tam BE, EC aequales, quam Be, eC aequales. (Et observa, hypothesin vel conditionem Porismatis hic applicari primo quidem ad punctum E quomodocumque sumtum in Dd, deinde vero ad definitum in ipsa punctum e, in quo nempe definitae vel datae rectae BC occurrit: quod quidem in Analysi Porismatum crebro ita fit.) Jam quoniam duae Be, eE duabus C e, eE aequales sunt, et basis BE basi CE aequalis; *Fig. 145.*

per El. I, 8. anguli quoque BeE, CeE aequales erunt, ergo recti (per El. I, Def. 10.) Rursus juncta Ae; quoniam duae Be, eA duobus Ce, eA aequales sunt, et basis BA basi CA aequalis; pariter anguli AeB, AeC aequales, et recti erunt. Quoniam ergo duo anguli EeB, BeA recti sunt; per El. I, 14. erunt Ee, eA in directum sitae, hoc est, recta Dd transit per punctum A. Et eadem angulum BAC bifariam secat, quod ostenditur ut prius. Et reliqua ut ante.

§. 358.

Rursus ad aliam hypothesin Porismatibus I — V. Sequentia quinque respondebunt.

Porisma XI. (resp. Por. I. vid. fig. ibid.)

Fig. 140. Dato angulo rectilineo BAC bifariam secto recta AD, et in una rectarum ipsum comprehendentium AB dato puncto E: inveniri poterit in altera AC punctum, ex quo et ex puncto dato E ductae ad ipsius AD puncta quaelibet binae rectae faciant cum ipsis AB, AC angulos internos aequales.

Sit F punctum in AC inveniendum; et sumto in AD puncto G quocumque, et junctis EG, FG, erunt per hypothesin Porismatis anguli AEG, AFG aequales. Sed et anguli GAE, GAF aequales sunt (supp.) et AG communis. Ergo (per El. I, 26. part. 2) erit AE aequalis AF: unde rursus dabitur F. Et componitur faciendo AF aequalem AE: et demonstratur per El. I, 4.

Porisma XII. Locus. (resp. Por. II.)

Fig. 146. Datis positione duabus rectis aequalibus BA, AC angulum facientibus in A; inveniri poterit positio rectae per A transeuntis, ad cujus punctum

quod-

quodlibet ductae ex B, C binae rectae faciant aequales cum A B, A C angulos.

Sit recta invenienda A D; et sumto in ipsa puncto quocumque E, jungantur rectae B E, C E: erunt igitur anguli A B E, A C E aequales. Sed juncta B C, anguli quoque A B C, A C B aequales sunt (vel ob aequales A B, A C, per El. I, 5. vel rursus ob hypothesin Porismatis): ergo et reliqui E B C, E C B aequales; et hinc per El. I, 6. rectae B E, E C aequales. Hinc quia duae A B, B E duabus A C, C E aequales sunt, et angulus A B E angulo A C E aequalis; per El. I, 4. angulus B A E angulo C A E aequalis erit; hoc est, angulus B A C bifariam secatur recta A D; quae igitur positione datur. Et manifesta est compositio per El. I, 9; et Demonstratio per I, 4.

Porisma XIII. (resp. Por. III.) Datis positione duabus rectis B A, A F facientibus angulum in A; B A quidem terminata in dato puncto B, A F vero infinita: inveniri poterit punctum in A F, et positio rectae per A transeuntis, sic ut ad hujus rectae punctum quodlibet ductae binae rectae ex puncto dato B et ex puncto in A F inveniendo, angulos internos cum duabus A B, A F aequales faciant. *Fig. ead.*

Sit punctum in A F inveniendum C, et invenienda recta per A transiens A D: et in hac sumto puncto quocumque E, junctis B E, C E, erunt anguli A B E, A C E aequales. Jungatur B C et occurrat rectae A D in e: pari ratione erunt et anguli A B e, A C e aequales: hinc et reliqui E B e, E C e aequales. Ergo per El. I, 6. tam A B et A C, quam E B et E C aequales. Hinc cum duae A B, B E duabus A C, C E aequales sint, et angulus A B E angulo A C E: erit angulus

BAE angulo CAE aequalis (per El. I, 4.): ergo recta AD angulum BAC bifariam secans positione datur. Et quia AC aequalis est AB; punctum C quoque datur. Et componitur, bifariam secando angulum BAF recta AD, et ab AF abscindendo AC aequalem AB.

Fig. ead. Porisma XIV. (resp. Por. IV.) Datis positione duabus rectis BA, AD facientibus angulum in A; BA quidem terminata in dato puncto B, AD vero infinita: inveniri poterit ad alteras ipsius AD partes recta transiens per A et punctum in ipsa, ex quo et ex puncto B ductae ad quodlibet ipsius AD punctum binae rectae faciant cum BA et cum recta invenienda angulos internos aequales.

Sit recta invenienda AF et punctum in ipsa inveniendum C: et per eandem Analysin, quae proxime tradita est, erit AB aequalis AC, et angulus BAD angulo CAD aequalis. Componitur itaque applicando ad AD angulum DAF aequalem angulo BAD, et ab AF abscindendo AC aequalem AB.

Fig. 147. Porisma XV. Locus. (Respondens Por. V., differens tamen eo, quod aliquid minus determinatum sit in datis, et plus sit inveniendum.) Datis positione duabus rectis BA, AF angulum facientibus, et in una earum AB dato puncto B: inveniri poterit punctum in altera AF, et rectae alicujus positio talis, ut e puncto dato B et puncto inveniendo ad rectae inveniendae punctum quodlibet ductae binae rectae faciant cum duabus AB, AF angulos internos aequales.

Sit punctum in AF inveniendum C, et recta invenienda Dd: jungatur BC, cui recta Dd occurrat in d; et sumantur alia duo quaecumque in Dd puncta E,

e, ex quibus ducantur EB, EC, et eB, eC. Per hypothesin Porismatis erunt anguli ABE, ACE aequales; pariterque anguli ABe, ACe; et ABd, ACd. Hinc et reliqui CBE, BCE aequales erunt. Et ob aequales quidem ABd, ACd erunt AB. AC aequales (per El. I, 6.): ob aequales CBE, BCE pari ratione BE, EC aequales. Ac similiter Be. eC aequales ostendentur Quoniam autem duae BE. Ee duabus CE, Ee aequales sunt. et basis Be basi Ce: per El. I, 8. erit et angulus BEe angulo CEe aequalis. Hinc quia duae BE. Ed duabus CE, Ed aequales sunt et angulus BEd angulo CEd per ostensa: erit per El. I, 4.) et basis Bd basi Cd aequalis, et anguli EdB, EdC aequales; ergo recti.

Jungatur recta Ad. Et quia ostensae sunt AB aequalis AC, et Bd aequalis dC: duae ergo Bd, dA duabus Cd. dA aequales, et basis BA basi CA aequalis: ergo (per El. I, 8.) anguli AdB. AdC aequales, itaque recti.

Quoniam ergo angulus DdB rectus est. pariterque angulus BdA rectus per ostensa: erunt (per El. I, 14.) rectae Dd, dA in directum sitae; hoc est, recta invenienda Dd transit per punctum A. Et eadem angulum BAC bifariam secat (quippe et angulus BAd angulo CAd aequalis, per eadem I, 8): ergo positione datur. Et quia AC ostensa est aequalis AB; punctum C quoque datur.

Et componitur angulum BAF bifariam secando recta AD, et ab AF abscindendo AC aequalem AB. Et erunt C punctum, et Ad recta, quorum positionem inveniri oportuit. Ac demonstratio manifesta est per El. I, 4.

§. 359.

Ad hypothesin, quod ductae rectae terminent triangula aequalia, investigabimus sequentia Porismata tria.

Fig. 140. Porisma XVI. (resp. Por. I. vid. Fig. ibid.) Datis positione duabus rectis BA, AC facientibus in A angulum, quem bifariam secet recta AD, et in una illarum AB dato puncto E: inveniri poterit in altera AC punctum alterum, e quo et e puncto dato E ductae ad quodlibet ipsius AD punctum binae rectae terminent triangula aequalia.

Sit punctum inveniendum F; et sumto in AD puncto quocumque G, et junctis EG, FG, per hypothesin Porismatis erunt triangula AEG, AFG aequalia. Sed ea latus AG commune habent, et angulum EAG aequalem angulo FAG (supp.): ergo (per Theorema §. 240.) erit AF aequalis AE: unde punctum F dabitur.

Et componitur, abscindendo AF aequalem AE. Sumto enim in AD puncto G quocumque, per El. I, 4. erit triangulum AEG triangulo AFG aequale.

Fig. 148. Porisma XVII. Locus. (respondens superiori Por. II.) Datis duabus rectis BA, AC aequalibus et in A facientibus angulum; inveniri poterit rectae per A transeuntis positio, ad cujus puncta quaelibet ductae ex punctis B, C binae rectae terminent triangula aequalia.

Sit recta invenienda AD; et ei occurrat juncta BC in E: et per hypothesin Porismatis aequalia erunt triangula ABE, ACE. Jam dico rectam AD bifariam secare angulum BAC. Si enim non; alia ergo ipsum bifariam secans ducatur (per El. I, 9.); et occurrat ipsi BC

in F. Quoniam ergo duae BA, AF duabus CA, AF aequales sunt, et angulus BAF angulo CAF aequalis; erit (per El. I, 4.) triangulum BAF aequale triangulo CAF. Sed quia triangulum BAE aequale est triangulo CAE; erit majus triangulo CAF, et a fortiori triangulum BAF majus CAF: sed et aequale, per ostensa: quod fieri nequit. Non ergo recta AD angulum BAC non bifariam secat: secat ergo bifariam, et hinc positione dabitur.

Et manifesta est compositio: bifariam secetur angulus BAC recta AD; et demonstratio manifesta est per El. I, 4.

Sed illa, quam dedimus, Analysis, ut verum fateamur, non prorsus ad rem sufficit. Ostendit enim illud duntaxat: si recta per A transiens et secans junctam BC in E, qualis AD, talis sit, ut ad ejus punctum E sumtae ex B, C rectae terminent triangula aequalia, eam rectam bifariam secare angulum BAC. At vero praeter E in quolibet alio puncto extra BC sumto nisi idem locum habeat, ut recta per illud punctum et per A transiens bifariam secet angulum BAC, vel ut cum AD coincidat; id, quod Porisma dicit, non erit verum. Jam vero Compositio quidem docet verum esse, quod Porisma dicit: sed hoc ad Analyseos munus pertinebat, ut illud quoque, quod diximus de alio praeter E puncto, demonstraret. (Itaque et Rob. Simson in Tractatu suo de Porismatis monet, si ejus rei, quae in Porismate ut indefinita vel utrumque sumenda enuntiatur, definitus tantum quidam valor in Analysi adhibeatur, id non sufficere; sed oportere indefinitam illam seu utcumque sumtam semel saltim in Analysi usurpari.) Alioqui minus ostenderetur in

Analysi, quam enuntiarat Porisma: hoc enim dicit: positionem dari rectae, ad cujus puncta quaelibet, utcunque sumta, ductae ex B, C rectae triangula terminent aequalia: Analysis autem nihil amplius ostenderat, quam positione dari rectam, ad cujus unum definitum punctum E ductae duae ex B, C rectae triangula terminent aequalia.

Fig. 149. Quod autem diximus de aliis praeter E punctis ostendendum fuisse, id de iis, quae intra triangulum ABC cadunt, sic potest ostendi: si scilicet punctum quodcumqne H illic sumatur, quod faciat triangula AHB, AHC aequalia, rectam AH et ipsam angulum BAC bifariam secare, seu punctum H in ipsa AD situm fore: vel, quod idem est, non posse extra AE esse punctum aliquod G, quod faciat triangula AGB, AGC aequalia. Junctarum enim BG, GC alterutra, ut BG, occurret ipsi AE, ut in H; et jungatur HC: et quia duae BA, AH duabus CA, AH aequales sunt, et angulus BAH angulo CAH (quia AE bifariam secat angulum BAC): erit triangulum ABH triangulo AHC aequale; ergo majus triangulo AGC; et a fortiori erit triangulum AGB majus triangulo AGC. Nullum ergo intra triangulum ABC punctum extra AE est, quod faciat triangula ipsum pro vertice, et rectas AB, AC pro basibus habentia aequalia. Sed pro punctis ad alteras partes ipsius BC sumtis non valet illa aut similis demonstratio. Itaque res alio modo tractabitur §. prox. seq.

Porisma XVIII. Locus. (respondens superiori Por. V.) Datis iisdem quae in praec., dabitur positione recta talis, ut, si ad sumtum ejus punctum quodcumque ducantur ex punctis A, B, C rectae, bina trian-

gula verticem in sumto puncto communem et bases A B, A C habentia sint inter se aequalia. (Differt rursus a praecedente eo, quod hic non supponitur aut requiritur, ut ea recta, quae positione dari ostendenda est, per punctum A transeat: sed hoc ipsum quoque demonstrandum erit.)

Sit recta invenienda Dd, et occurrat junctae BC in E: et sumatur in ipsa punctum quodcumque G; junctis igitur AG, BG, CG, erunt per hypothesin Porismatis triangula ABG, ACG aequalia. Jam dico DG, GA in directum sitas esse. Si enim non sint; ducatur recta AE, quae unam duarum BG, GC secabit, puta ipsam BG in H; et jungatur CH. Quoniam autem punctum E est in recta Dd; erunt et triangula ABE, ACE aequalia: et quia praeterea A B, AC aequales sunt, hincque et anguli ABC, ACB (El. I, 5.); erit (per §. 240.) BE aequalis CE, et angulus BAE aequalis CAE. Hinc, ut modo ad Porism. XVII. demonstravimus, triangulum BAH aequale triangulo CAH, et triangulum BAG majus triangulo CAG. Sed et aequale; quod fieri nequit. Non ergo rectae DG, GA non erunt in directum: erit ergo D G A linea recta; hoc est, cum DEA coincidit; et quia bifariam secat angulum BAC, positione datur. Et manifesta est Compositio, et eadem quae in praec. Por. *Fig. 149.*

Sed hic rursus notandum, quod ad proximum monuimus, eam demonstrationem non valere pro punctis G ad alteras partes BC sumtis. Sed omnino horum trium posteriorum Porismatum investigatio alium proprium habet fontem, ex quo generalius proposita investigantur: sed talem, qui theoriam parallelarum

supponit, adeoque res hic est παρεργον. Paucis tamen eam absolvemus §. prox.

§. 360.

Fig. 151. Porisma A. Datis positione duabus rectis BA, AC facientibus in A angulum, quem utcumque secet recta item positione data AD; et in una priorum AB dato puncto E: inveniri poterit in altera AC punctum alterum, ex quo et ex puncto E ductae ad quodlibet ipsius AD punctum binae rectae terminent triangula aequalia.

Sit punctum in AC inveniendum F: sumto ergo in AD puncto quocumque G, et junctis EG, FG rectis; per hypothesin Porismatis erunt triangula AEG, AFG aequalia. Jungatur EF, et occurrat AD in H: dico eam in H bifariam sectam esse. Si enim non; erit duarum EH, HF altera major, puncta HF; et abscindatur HI aequalis EH; junganturque AI, IG. Et quia triangula AEH, AHI sunt super aequalibus basibus EH, HI, et inter easdem parallelas, nempe EI et eam, quae ipsi per A parallela duci potest: erunt triangula AEA, AHI aequalia (per El. I, 38.) Et eadem ratione erunt triangula GEH, GHI aequalia. Ergo aequalia aequalibus addendo, totum triangulum AEG toti AIG aequale. Sed (supp.) triangulum AEG triangulo AFG aequale est. Ergo et triangula AIG, AFG aequalia sunt; pars et totum: quod fieri nequit. Non ergo inaequales sunt EH, HF: ergo aequales.

Per punctum E ducatur EK ipsi AC parallela, quae positione dabitur, quia et punctum E et AC po-

sitione data sunt; ergo et punctum K datur, (Eucl. Dat. 28. text. gr.) in quo illa positione datae AD occurrit. Et quia tam anguli ad verticem H aequales sunt (El. I, 15.), quam alterni HEK, HFA (I, 29.); aequales autem et rectae EH, HF per ostensa: erunt et AH, HK aequales (I, 26.). Et quia datum est punctum K; dabitur et punctum H, in quo recta AK bifariam secatur. Hinc et recta EHF positione datur, et ejus cum positione data AC occursus F datur.

Componetur autem ita. Per E rectae AC parallela ducta EK, (El. I, 31.) bifariam secetur AK in H, (I, 10.) et ducatur EH, quae producta ipsi AC occurrat in F: et erit punctum F id, quod inveniendum erat; nempe sumto in AD puncto quocumque G, et junctis EG, FG rectis; aequalia erunt triangula AEG, AFG. Quoniam enim anguli EHK, AHF aequales, ut ad verticem (I, 15.); et anguli HKE, HAF aequales, ut alterni ad parallelas (I, 29.); sed et rectae KH, AH aequales (constr.): erunt et EH, HF aequales (I, 26.). Hinc (per I, 38.) tam triangula AEH, AHF, quam triangula GEH, GHF aequalia: ergo et tota AEG, AFG aequalia, q. e. d.

Porisma B. Locus. Datis duabus rectis *Fig.*
BA, AC in A facientibus angulum (aequalibus, *152.*
an inaequalibus, nihil interest): dabitur positione recta aliqua transiens per A, ad cujus quodlibet punctum ductae e[illegible]tis extremis B, C binae rectae triangula terminent aequalia.

Sit recta invenienda, seu quae positione dari demonstranda est, AD: sumto igitur in ipsa puncto quocumque E, et junctis BE, CE; erunt triangula ABE, ACE aequalia. Jungatur BC, et secet AD in F.

Et pari ratione, ac in prox. praec. (Fig. 151.) de rectis EH, HF ostensum fuit, erunt rectae BF, FC aequales. Quoniam autem data sunt puncta B, C (supp.), ergo et recta BC: dabitur et punctum F, in quo ipsa bifariam secatur: ergo et recta AD per data duo puncta A et F transiens, positione dabitur.

Et manifesta est Compositio, quae fit junctam BC bifariam secando in F, et ducendo rectam AFD; itemque demonstratio.

Porisma C. Locus. Datis iisdem, quae in prox. praec., dabitur positione recta talis, ut, si ad sumtum ejus punctum quodcumque ducantur ex punctis A, B, C rectae, bina triangula verticem communem in sumto puncto, et bases AB, AC habentia, sint inter se aequalia.

Fig. 153. Sit recta invenienda Dd; et occurrat junctae BC in E: dico eam productam per A transire. Non enim transeat, si fieri potest; et jungatur EA; et in ipsa Dd sumatur punctum quodcumque F; et juncta FA rectam BC alibi quam in E secabit, ut in G: ducantur FB, FC. Jam per hypothesin Porismatis triangula ABF, ACF aequalia sunt: hinc pari ratione, ac in praecedentibus ostensum est, BC in G bifariam secta erit. Rursus per eandem hypothesin Porismatis triangula ABE, ACE aequalia sunt: ergo BE, EC aequales sunt (per El. I, 38. conv.) et hinc BE major GC, et a fortiori BG major GC. Sed et aequalis, per ostensa: quod fieri nequit. Non ergo recta Dd producta non per punctum A transit: transit ergo, et cum AE coincidit. Et quia data BC bifariam secta est in E: datur punctum E; ergo et recta AE seu recta invenienda Dd positione datur.

Et compositio et demonstratio eadem est quae praecedentes.

His affine sequens, quod adhuc apponimus,

Porisma D. Locus, Datis positione duabus rectis BA, AD angulum facientibus in A; *Fig.* *154.* AB quidem terminata in dato puncto B, AD vero infinita ad partes D: positione dabitur (vel invenietur) ad alteras ipsius AD partes recta talis, e cujus puncto quocumque et ex puncto B ad quodlibet rectae AD punctum ductae duae rectae aequalia terminent triangula rectae AB et rectae punctum prius cum puncto A jungenti insistentia.

Sit recta invenienda, seu quae positione dari ostendenda est, Ee; et in ipsa sumto puncto quocumque F, in Ad autem sumto utlibet puncto G, jungantur rectae AF, FG, GB: et juncta BF rectam AD secet in H. Per hypothesin Porismatis erunt triangula ABG, AFG aequalia: hinc, ut in praecedentibus, recta BF bifariam in H secta erit; quare ratio BH ad BF data est, nempe ut 1 ad 2. Quoniam ergo inde ex puncto B dato abscissa duo unius rectae segmenta BH, BF in data ratione sunt, et eorum unius segmentum H tangit rectam AD positione datam (hoc est, jacet in positione data: Eo enim significatu usurpatur graecum απτεσθαι): etiam recta, quam alterius extremum F tangit, positione dabitur (per Apollonii Locorum planorum Lib. I. prop. 4. ex restitutione Rob. Simson. Vid. Apollonius von Pergen ebene Oerter von J. W. Camerer. Leipz. 1796. S. 36.) Tangit autem alterius extremum rectam Ee (ex hyp.): Ergo recta Ee positione datur.

Componeturque sic: Ex B ad AD demittatur perpendicularis BI, et producatur, ut fiat IK aequalis BI: tum per K ducatur ipsi AD parallela Ee: ea erit recta invenienda. Sumta enim in ipsa puncto quocumque F, et in AD sumto puncto quocumque G, jungantur AF, FG, GB: et juncta BF secet AD in H. Et quia parallelae sunt HI, FK; bifariam autem secta est BK in I: erit et BF in H bifariam secta (El. VI, 2.) Ergo aequalia erunt (pari ratione, ac in praecedentibus ostensum est) triangula ABG, AFG; q. e. d.

§. 361.

Porismata ad figuram Problematum XX – XXVII. Cap. IV. §. 177. s.

Fig. 155. Porisma XIX. Locus. Data recta AB positione, et ejus extremis A, B datis; inveniri poterit (seu positione dabitur) recta, ad cujus punctum quodcumque ductae ex punctis A, B binae rectae sint inter se aequales.

Sit recta invenienda Cc, quae rectae AB occurrat in D: et sumtis in ea punctis duobus C, c utcumque, per hypothesin Porismatis erunt AC, CB aequales, itemque Ac, cB aequales. Quoniam ergo duae AC, Cc duabus BC, Cc aequales sunt, et basis Ac basi Bc: erit et angulus ACc angulo BCc aequalis (El. I, 8.) Hinc cum duae AC, CD duabus BC, CD aequales sint, et angulus ACD anguli BCD: erit (El. I, 4.) AD aequalis BD, et anguli CDA, CDB aequales, itaque recti (I, Def. 10.). Datur ergo punctum D bifariam secans ipsam AB (per Datum ad El. I, 10. §. 340.), et recta CD positione (per Datum ad El. I, 11. §. 340.).

Vel, Quia rectae AD, DB ad rectam inveniendam CE ductae sunt, aequales sunt per hypothesin Porismatis: et ob eandem rationem sunt AC, CB aequales. Quoniam ergo duae AD, DC duabus BD, DC aequales sunt, et basis AC basi BC aequalis: erunt (per El. I, 8.) anguli ADC, BDC aequales, ergo recti. Et reliquas, ut modo.

Componetur ergo bifariam secando AB in D, eique perpendicularem excitando CD. Sumto enim in ea puncto quocumque C, erunt AC, CB aequales (per El. I, Def. 10. et prop. 4.).

Porisma XX. Data positione recta CE, et puncto A extra ipsam; inveniri poterit punctum aliud ad alteras ipsius CE partes tale, ut ex ipso et ex puncto A ad quodlibet rectae CE punctum ductae binae rectae sint inter se aequales. *Fig. ead.*

Sit punctum inveniendum B, et ducatur AB, quae rectae CE occurrat in D. Et ceteris, ut modo, factis et eadem argumentatione, ostendetur AB in D bifariam sectam, et CE ipsi perpendicularem esse. Quoniam igitur punctum A et recta CE positione datur: datur et ipsi perpendicularis AD positione, et magnitudine (per Datum ad El. I, 12. §. 340.); hinc et recta DB ipsi aequalis, et punctum B datur.

Et componetur ex A ad CE demittendo perpendicularem AD, et eam producendo, ut sit DB aequalis AD. Et demonstratur per El. I, Def. 10. et prop. 4.

§. 362.

Porisma XXI. Locus. Data recta AB; positione dabitur seu inveniri poterit recta talis, *Fig. ead.*

ad cujus punctum quodcumque ductae ex A, B rectae faciant cum ipsa recta invenienda angulos internos aequales.

Sit recta invenienda CE occurrens rectae datae AB in E. Sumto igitur in ipsa puncto quocumque C, et ductis AC, CB, erunt anguli ACE, BCE aequales per hypothesin Porismatis. Similiter sumto alio in ipsa puncto quocumque c, et ductis Ac, cB, erunt anguli AcE, BcE aequales: quare et (per El. I, 13.) qui ipsis deinceps sunt, anguli AcC, BcC aequales erunt. Quoniam ergo duo anguli ACc, AcC duobus BCc, BcC aequales sunt. et latus Cc commune, quod aequalibus angulis adjacet: erit et (per El. I, 26.) AC aequalis BC. Cum ergo duae AC, CD duabus BC, CD aequales sint, et angulus ACD angulo BCD: erit et (per El. I, 4.) AD aequalis DB, et anguli CDA, CDB aequales, ergo recti. Dabitur itaque punctum D datam AB bifariam secans, et recta CD positione.

Brevior Analysis sic: Quoniam punctum D est in recta invenienda CD; anguli ADE, BDE aequales sunt per hypothesin Porismatis; et hinc etiam, qui ipsis deinceps sunt, ADC, BDC aequales. Sed et anguli ACD, BCD aequales per hyp. Porism. Et est latus CD commune. Ergo (El. I, 26.) AD aequalis BD; unde punctum D datur. Et ob angulos ADC, BDC aequales recta CD ipsi AB perpendicularis est: ergo positione datur.

Et est Compositio ac demonstratio eadem fere quae Porism. XIX.

Fig. ead. Porisma XXII. Data positione recta CE, et puncto A extra ipsam: inveniri poterit punctum alterum ad alteras ipsius CE partes tale, ut

ex ipso et ex puncto A ductae ad rectae CE punctum quodlibet binae rectae faciant cum ipsa aequales angulos internos.

Analysis Analysi praecedentis sic respondet, ut Porismatis XX. respondebat illi Porismatis XIX. Compositio autem et demonstratio eadem fere quae Porismatis XX.

§. 363.

Porisma XXIII. Locus. Data recta AB, inveniri poterit seu dabitur positione recta, cujus e puncto quocumque ad puncta A et B data ductae binae rectae faciant aequales cum recta AB angulos. *Fig. ead.*

Sit recta invenienda CD ipsi AB occurrens in D; et sumto in ipsa puncto quocumque C, junctis rectis CA, CB, erunt anguli CAB, CBA aequales; unde per El. I, 6. rectae quoque AC, CB aequales. Similiter sumto alio in ipsa puncto c, ductae rectae Ac, cB aequales erunt. Quoniam ergo duae AC, Cc duabus BC, Cc aequales sunt, et basis Ac basi Bc aequalis; erit et angulus ACc angulo BCc aequalis (El. I, 8.) Hinc cum sint duae AC, CD duabus BC, CD aequales, et angulus ACD angulo BCD: per El. I, 4. erit et AD aequalis BD, et anguli ADC, BDC aequales, ergo recti. Datur itaque punctum D, et recta DC ipsi AB in D perpendicularis.

Et manifesta est Compositio, ut et demonstratio per I, 4. Et huic similiter, ac in praecedentibus, respondebit

Porisma XXIV. Data positione recta GE, et puncto A extra ipsam; inveniri poterit *Fig. ead.*

punctum alterum ad alteras ipsius CE partes, tale. ut ex ipso et ex puncto A ductae ad rectae CE punctum quodcumque binae rectae faciant aequales angulos cum recta punctum datum A et punctum inveniendum connectente.

§. 364.

Fig. ead. Porisma XXV. Data recta AB; positione dabitur seu inveniri poterit recta ipsi perpendicularis, ad cujus quodcumque punctum ductae e punctis A et B binae rectae aequalia terminent triangula.

Sit recta invenienda CD, quae datae AB perpendicularis sit in D; et ad punctum in ipsa quodcumque sumtum C ducantur rectae AC, BC: erit igitur per hypothesin Porismatis triangulum ACD triangulo BCD aequale. Quoniam ergo haec triangula latus CD commune habent, et angulum CDA angulo CDB aequalem (supp. et El. I, Def. 10), et ipsa etiam sunt aequalia: erit et (per Theorema §. 240.) AD aequalis BD. Unde punctum D datur; et hinc recta quoque DC, quae ipsi AB in D perpendicularis est, positione datur.

Et manifesta est Compositio ac Demonstratio.

Et huic rursus respondet parvula Analyseos mutatione

Porisma XXVI. Data positione recta CE, et puncto A extra ipsam; inveniri poterit punctum alterum et ad alteras ipsius CE partes et in recta ex A ad CE perpendiculari demissa situm tale, ut ex ipso et ex puncto A ad rectae CE punctum quodcumque ductae binae rectae aequalia terminent triangula.

§. 365.

§. 365.

Porismata ad figuram Quaest. V. et VI. Cap. II. vel ad Problemata §. 186. s 190. s.

Porisma XXVII. Dato angulo rectilineo BAC, et in una rectarum ipsum comprehendentium AB dato puncto D; inveniri poterit in altera AC punctum tale, ut, si a puncto D et a puncto inveniendo bina segmenta aequalia quaecumque versus B et C abscindantur, rectae ab iisdem punctis ad alternorum segmentorum abscissorum terminos ductae inter se aequales sint. *Fig.* *156.*

Sit punctum inveniendum E; itaque abscissis DF, EG segmentis aequalibus versus B et C, erunt junctae DG, EF aequales per hypothesin Porismatis. Ducatur DE. Et quia duae DF, FE duabus EG, GD aequales sunt, et basis DE communis; erit et angulus DFE angulo EGD aequalis (El. I, 8.). Quoniam ergo angulus FAG communis, et anguli AFE, AGD aequales sunt, et latus FE lateri GD aequale, quod communem angulum FAG subtendit: per El. I, 26. part. 2. erit et AE aequalis AD. Hinc, cum detur punctum D, punctum quoque E dabitur.

Vel quia duae FD, DE duabus GE, ED aequales sunt, et FE aequalis GD: erit et angulus FDE angulo GED aequalis (I, 8.). Cum igitur triangulum ADE habeat angulos infra basin BDE, CED aequales: per ea, quae apud Proclum ostensa sunt ad prop. 6*tam* primi (v. Chrestom. geom. p. 220.), erunt et latera AD, AE aequalia. Unde cum detur punctum D, dabitur et punctum E.

Et componetur, ab AC abscindendo AE aequalem AD. Abscissis enim ab DB, EC segmentis aequalibus

28

utcumque DF, EG, et ductis rectis DG, EF: cum sit AD aequalis AE, et DF aequalis EG; erit et tota AF toti AG aequalis. Ergo duae FA, AE duabus GA, AD aequales, et angulus ad A communis: itaque per El. I, 4. basis EF basi DG aequalis.

Huic affine est Porisma: Datis iisdem, quae in proximo Porismate, inveniri poterit in altera punctum tale, ut, si ab ipso et a puncto D versus A abscindantur bina segmenta aequalia quaecumque, recta ab iisdem punctis ad alternorum segmentorum abscissorum terminos ductae sint inter se aequales. Cujus Analysis iterum fit per El. I, 8. 26., aut per I, 8. 6.

§. 366.

Generalius autem enuntiari et demonstrari potest hoc Porisma praemissis duobus Lemmatis sequentibus, quorum secundum supponit propositiones de parallelis.

Fig. 157. a. b. Lemma I. Datis positione duabus rectis BA, AG angulum facientibus in A; positione dabitur per punctum A extra angulum BAG recta, quae cum utraque datarum BA et AG faciat aequales angulos.

Recta enim FE faciat angulos FAB, EAG aequales. Bifariam secetur angulus BAG recta AK. Et quia angulus FAB angulo EAG, et angulus BAK angulo KAG aequalis est; erit et totus vel reliquus FAK toti vel reliquo EAK aequalis. Itaque recta AK rectae FE perpendicularis est (El. I, Def. 10.). Sed positione datur AK, quia datum angulum BAG bifariam secat (I, 9.). Ergo et quae ipsi perpendicularis est FE in puncto A dato, positione dabitur.

Componitur ergo, angulum BAG bifariam secando recta AK, et ipsi AK in A erigendo perpendicularem FAE: quae faciet, quod imperatum est. Quoniam enim anguli KAF, KAE aequales sunt ob perpendicularem, et anguli BAK, KAG aequales (const.): erit etiam reliquus vel totus FAB reliquo vel toti EAG aequalis.

Lemma II. Datis positione duabus rectis AB, CD, et in una earum dato puncto A; positione dabitur recta transiens per A, quae cum duabus AB, CD ad easdem partes faciat aequales angulos. *Fig. 158. a—e.*

Sit recta AE, quae faciat angulos BAE, AED aequales, qui ad easdem ipsius AE partes sunt. Ii autem aut recti sunt, aut non. Et si quidem recti sunt; parallelae erunt rectae AB, CD (per El. I, 28.), et recta AE positione dabitur, quia a dato puncto A ad datam positione rectam CD perpendicularis ducta est (per Datum ad El. I, 12. §. 340.). Si autem non sint recti; simul igitur non erunt duobus rectis aequales, hincque AB non erit parallela CD: quia, si esset, duobus rectis aequales forent (El. I, 28.). Ducatur igitur (El. I, 31.) AG per punctum A parallela ipsi CD: et producatur EA ad F. Et erit angulus FAG aequalis angulo AED, exterior nempe interiori opposito (El. I, 29.); sed et angulus BAE aequalis est angulo AED (hyp.): ergo et angulus GAF angulo BAE aequalis est. Quoniam ergo positione datae sunt duae rectae BA, AG angulum facientes in A; et recta FE transiens per A extra angulum BAG facit cum utraque BA et AG aequales angulos: per Lemma I. positione dabitur FE. *Fig. 158, a. Fig. 158, b, c.*

Componetur autem ita. Si positione datae AB, CD sint parallelae; demittatur ex A ad CD perpendicularis AE: et propter parallelas (per El. I, 29.) erunt duo anguli BAE, AED simul aequales duobus rectis: et quoniam AED rectus, erit et BAE rectus: aequales ergo anguli BAE, AED.

Si vero non parallelae sint: per A agatur ipsi CD parallela AG, et ducatur (per Lemma I.) recta FE per A faciens cum utraque BA, AG angulos aequales FAG, BAE, et occurrat ipsi CD in E. Propter parallelas erit et angulus FAG angulo AED aequalis (I, 29.): hinc et duo BAE, AED aequales: q. e. f.

§. 367.

His igitur praemissis, generalius, quod diximus, hoc erit.

Fig. 159. Porisma E. Datis positione duabus rectis AB, HC, et in una earum AB dato puncto D: invenietur in altera punctum tale, ut, si inde ab ipso et a puncto D, ad easdem partes rectae ipsa jungentis, abscindantur bina rectarum AB, HC segmenta utcumque aequalia, rectae horum terminos cum alternis prioribus punctis jungentes sint inter se aequales.

Sit punctum inveniendum E: abscissis igitur DF, EG segmentis utcumque aequalibus ad easdem junctae DE partes; junctae DG, EF aequales erunt. Ergo (per El. I, 8.) anguli FDE, DEG aequales erunt. Quoniam igitur datis positione duabus rectis AB, HC, et in una earum AB dato puncto D, per hoc punctum D transit recta DE cum duabus AB, HC faciens ad easdem partes aequales angulos BDE, DEC: per praemissum Lemma II. dabitur DE positione; ergo et

punctum E, in quo positione datae HC occurrit, dabitur.

Et componetur ita. Ducatur (per Lemma II.) recta DE transiens per D, quae cum duabus AB, HC ad easdem partes faciat angulos aequales BDF, DEC: erit E punctum, quod invenire oportuit. Abscissis enim a DB et EC segmentis quibuscumque aequalibus DF, EG; junctae DG, EF aequales erunt per El. I, 4.

Hujus conversum est hoc

Porisma XXVIII. Locus. Data positione recta AB, et in ipsa puncto D, dato, extra ipsam autem puncto E; positione dabitur recta per punctum E transiens, talis, ut, si ab utraque abscindantur utcumque bina segmenta aequalia punctis D, E adjacentia ad easdem rectae DE partes, rectae a punctis D et E ad alternorum horum segmentorum terminos ductae sint inter se aequales. *Fig. ead.*

Sit recta invenienda HEC; et abscissis segmentis DF, EG ad easdem rectae DE partes utcumque aequalibus, jungantur rectae DG, EF: eae igitur per hypothesin Porismatis aequales erunt. Et ostendetur, ut in praecedente, angulos BDE, CED aequales esse (per El. I, 8.) Ob puncta autem D, E data datur DE positione; et quia AB quoque positione datur, datur angulus BDE: ergo et qui ipsi aequalis est, angulus DEC; et quia DE positione data est, EC quoque positione dabitur.

Et componitur, ad junctam DE applicando angulum DEC angulo BDE aequalem (per El. I, 23.), et producendo CE ad H. Et demonstratio eadem est quae praecedentis, per El. I, 4.

§. 368.

Fig. 160. Porisma XXIX. Dato angulo rectilineo BAC, et in una rectarum ipsum comprehendentium AB dato puncto D; inveniri poterit in altera AC punctum tale, ut, si inde ab ipso et a puncto D versus C et B abscindantur segmenta rectarum AB, AC bina quaecumque aequalia, ea in terminis suis aequales faciant angulos cum rectis ab his terminis ad alterna priora puncta ductis.

Sit punctum in AC inveniendum E; et abscissis segmentis DB, EC utcumque aequalibus DF, EG, itemque segmentis Df, Eg utcunque aequalibus, et junctis rectis DG, EF, itemque Dg, Ef: erunt anguli DFE, EGD aequales: pariterque anguli DfE, EgD aequales erunt; ergo et qui ipsi deinceps sunt, anguli FfE, GgD aequales erunt (El. I, 13.). Et quia DF ipsi EG, et Df ipsi Eg aequalis est: reliqua quoque Ff reliquae Gg aequalis erit. Quoniam ergo in triangulis FfE, Ggd duo anguli ad F, f duobus angulis ad G, g aequales sunt, et latus Ff lateri Gg aequale, quod aequalibus angulis adjacet: per El. I, 26. part 1. vel §. 263. FE quoque aequalis GD. Et hinc similiter, ut ad Porisma XXVII. ostensum est, ostendetur esse AD, AE aequales: unde, cum puncta A, D dentur et AC positione, punctum E quoque dabitur.

Et componetur faciendo AE aequalem AD. Et demonstrabitur per El. I, 4.

Huic rursus analogum est Porisma, cum segmenta aequalia inde a punctis D, E versus A abscinduntur.

§. 369.

Generalius autem rursus erit

P o r i s m a F. (v. Fig. ad Porism. E.) Datis positione duabus rectis A B, H C, et in earum una AB dato puncto D: invenietur in altera punctum tale, ut si inde ab ipso et a puncto D, ad easdem partes rectae haec duo puncta jungentis, abscindantur bina rectarum A B, H C segmenta utcumque aeqnalia, ea in terminis suis aequales faciant angulos cum rectis ab his terminis ad alterna priora puncta ductis. *Fig.* *159.*

Sit punctum in H C inveniendum E: abscissis igitur ad easdem junctae D E partes segmentis quibuscumque duobus D F, E G aequalibus, et junctis D G, E F; aequales erunt anguli D F E, E G D. Similiterque abscissis et junctis aliis, ostendetur, ut modo, D G esse aequalem E F. Et hinc, ut ad Porism. E, anguli F D E, D E G aequales esse, et punctum E positione dari ostendetur. Et componetur ut Porism. E.

P o r i s m a XXX. L o c u s. Data positione recta A B, et in ipsa puncto D dato, extra ipsam autem puncto E: positione dabitur recta per punctum E transiens talis, ut, si ab utraque recta, positione data et invenienda, abscindantur utcumque bina segmenta aequalia punctis D, E adjacentia et ad easdem rectae puncta D, E jungentis partes sita, ea in terminis suis aequales angulos faciant cum rectis ab his terminis ad alterna priora puncta ductis.

Sit recta invenienda H C, et abscissis segmentis D F, E G ad easdem rectae D E partes utcumque aequalibus, junctisque rectae D G, E F; et rursus alteris abscissis, et junctis; per hypothesin Porismatis erunt anguli D F E, E G D aequales. Et ostendetur, ut modo,

angulos FDE, DEG aequales esse. Unde eodem modo, quo ad Por. XXVIII., ostendetur EC positione dari. Et componetur, ut illud.

§. 370.

Fig. 161. Porisma XXXI. Dato angulo rectilineo BAC et in una rectarum ipsum comprehendentium AB dato puncto D; inveniri poterit in altera AC punctum tale, ut, si inde ab ipso et a puncto D versus C et B abscindantur segmenta quaecumque aequalia, rectae ab illis punctis ad alternorum abscissorum segmentorum terminos ductae faciant in illis punctis aequales angulos internos cum rectis AB, AC.

Sit punctum inveniendum E: ergo abscissis DF, EG utcumque aequalibus, et junctis DG, EF; anguli ADG, AEF aequales sunt per hypothesin Porismatis: ergo et qui ipsis deinceps sunt, anguli FDG, GEF aequales (El. I, 13.). Jam erunt rectae AD, AE aequales. Sint enim inaequales, si fieri potest, et sit AE major: abscindatur AH aequalis AD; et HI aequalis EG; et jungantur FH, DI. Quoniam igitur AD aequalis est AH, et DF aequalis HI (seu EG): erit tota AF toti AI aequalis. Ergo duae FA, AH duabus IA, AD aequales, et angulus ad A communis: quare (El. I, 4.) et angulus AHF angulo ADI aequalis: itaque angulus ADG major AHF. Sed est AHF externus major interno AEF (I, 16.). Ergo angulus ADG major angulo AEF. Sed et aequalis: quod fieri nequit. Non ergo erunt AD, AE inaequales: ergo aequales. Et quia datur punctum D, dabitur et punctum E.

Et componitur, abscindendo AE aequalem AD; et demonstratur per El. I, 4.

Et analogum erit Porisma, vel Casus alter Porismatis, cum segmenta aequalia inde a punctis D, E versus A sumuntur: et erit similis Analysis et Compositio.

§. 371.

Generalius autem rursus erit

Porisma G. Datis positione duabus rectis AB, HC, et in una earum AB dato puncto D; invenietur in altera HC punctum tale, ut, si inde ab ipso et a puncto D, ad easdem rectae illa jungentis partes, abscindantur bina rectarum AB, HC segmenta utcumque aequalia, rectae ab illis punctis ad alternorum segmentorum abscissorum terminos ductae faciant in illis punctis cum rectarum AB, HC segmentis aut punctis A et H, aut punctis B et C adjacentibus angulos aequales. *Fig. 162.*

Sit punctum inveniendum E: abscissis igitur DF, EG segmentis utcumque aequalibus ad easdem junctae DE partes, et junctis rectis DG, EF; erunt per hypothesin Porismatis aut anguli ADG, HEF aequales; aut anguli BDG, CEF aequales; sed posteriori casu, rursus, qui ipsis deinceps, anguli ADG, HEF aequales. Jam erunt et DG, EF aequales. Si enim non sint aequales; erit altera major ut DG; et abscindatur DG aequalis EF, et jungantur FG, FI. Quoniam igitur duae FD, DI duabus GE, EF aequales sunt, et angulus FDI angulo GEF aequalis: erit et (El. I, 4.) basis FI basi GF aequalis, et angulus FID angulo GFE. Et quia FI, FG aequales sunt per ostensa;

erit angulus FIG angulo FGI aequalis (El. I, 5.). Ergo et duo simul FID, FIG duobus EFG, FGI aequales: itaque duobus FID, FIG majores erunt duo simul EFG, FGE. Sunt autem duo simul FID, FIG, duobus rectis aequales (I, 13.): ergo duo EFG, FGE majores duobus rectis: quod fieri nequit, cum minores sint per El. I, 17., utpote duo anguli trianguli EFG. Non ergo erunt DG, EF inaequales; ergo aequales. Cum igitur duae FD, DE duabus GE, ED aequales sint, et basis FE basi GD aequalis: erit (I, 8.) angulus FDE angulo GED aequalis. Datur autem punctum D, et rectae AB, HC positione: itaque et DE faciens cum ipsis angulos ad easdem partes aequales, positione dabitur per Lemma II., et punctum E dabitur.

Fig. *163.* Alia Analysis. Sit punctum inveniendum E, et juncta recta DE; dico angulos ADE, HED aequales esse. Si enim inaequales, et major sit angulus ADE: constituatur (El. I, 23.) ad AD angulus ADg angulo HED aequalis; et recta Dg intra angulum ADE cadet, et occurrat HE in g; tum abscindatur Df aequalis Eg, et jungatur Ef: et erit per hypothesin Porismatis angulus ADg angulo HEf aequalis; sed et angulo HED (constr.): ergo anguli HEf, HED aequales, pars et totum, quod fieri nequit. Non ergo inaequales sunt anguli ADE, HED: ergo aequales. Et reliqua ut prius.

Et componetur eodem modo, quo Porisma E: et demonstrabitur per El. I, 4.

§. 372.

Fig. *162.* Porisma XXXII. Locus. Data positione recta AB, et in ipsa dato puncto D, extra autem

ipsam puncto E: positio invenietur rectae per punctum E transeuntis talis, ut, si ab utraque recta, positione data et invenienda, abscindantur utcumque bina segmenta aequalia punctis D, E adjacentia et ad easdem rectae DE partes, rectae a punctis D, E ad alternorum segmentorum abscissorum terminos ductae in iisdem punctis D, E faciant angulos aequales cum rectae datae AB et rectae inveniendae segmentis punctis D, E adjacentibus aut ad dictas rectae DE partes aut ad alteras.

Sit recta invenienda HC, et abscissis segmentis DF, EG utcumque aequalibus ad assignatas junctae DE partes, et junctis rectis DG, EF; erunt per hypothesin Porismatis aut anguli ADG, HEF, aut anguli BDG, CEF aequales. Et per ea, quae modo demonstrata sunt in Analysi praecedentis, erunt anguli AD E, HED aequales. Et ob AD, DE positione datas; dabitur et HE positione. Et componitur, ad DE constituendo angulum DEH aequalem ADE, et producendo HE ad C. Et manifesta est demonstratio per El. I, 4.

§. 373.

Sequentium demonstratio supponit propositiones ad theoriam parallelarum pertinentes.

P o r i s m a H. Dato angulo rectilineo BAC, et in una AB rectarum ipsum comprehendentium dato puncto D, inveniri poterit in altera AC punctum tale, ut, si inde ab ipso et a puncto D versus C et B abscindantur segmenta rectarum AB, AC bina quaecumque aequalia, rectae ab eorum terminis, ad *Fig. 164.*

alterna priora puncta ductae terminent aequalia triangula dato angulo B A C adjacentia.

Sit punctum inveniendum E; et abscissis a D B, E C segmentis utcumque aequalibus D F, E G, et junctis rectis D G, E F; erunt per hypothesin Porismatis triangula A D G, A E F aequalia. Et demto communi triangulo A D E, residua triangula D G E, E F D aequalia erunt. Et quia super eadem basi D E sunt, inter easdem parallelas erunt (El. I, 39.): ergo juncta F G erit ipsi D E parallela. Per G ducatur ipsi A B parallela G I, occurrens productae D E in I; et in parallelogrammo D F G I sunt latera opposita F D, G I aequalia (I, 34.). Est autem F D aequalis G E (const.). Ergo G E, G I aequales sunt, et anguli G E I, G I E aequales (I, 5.). Est autem angulus quidem G E I angulo A E D aequalis, ut ad verticem (I, 15.); angulus vero G I E alterno A D I aequalis (I. 29.): ergo et anguli A D E, A E D aequales erunt, et hinc (I, 6.) A D, A E aequales. Et quia puncta A, D dantur, et A C positione: dabitur et puncta E.

Et componetur, ab A C abscindendo A E aequalem A D: et demonstrabitur per El. I, 4.

Et alter Porismatis casus, cum segmenta aequalia versus A abscinduntur, similiter demonstrabitur.

Hujus conversum erit

Fig. 165. Porisma I. Data positione recta a B, et in ipsa dato puncto D, et extra ipsam puncto E, sic sito, ut angulus a D E sit recto minor; invenietur recta per E transiens et cum D a ad partes a concurrens, talis, ut, si ab recta positione data a B et ab recta invenienda abscindantur ad utrasvis rectae D E partes segmenta punctis D, E adjacentia aequalia, et a

segmentorum abscissorum terminis ad alterna illa puncta ducantur rectae; eae triangula terminent aequalia verticem in dicto concursu habentia.

Sit recta invenienda h C, concurrens cum a B ad partes a in A; et abscissis segmentis D F, E G ad utrasvis rectae D E partes aequalibus utcumque, et junctis D G, E F rectis; erunt per hypothesin Porismatis triangula A D G, A E F aequalia. Hinc per ea, quae paullo ante demonstrata sunt, erunt anguli A D E, A E D aequales. Datur autem angulus A D E; ergo et angulus A E D; et hinc recta AE seu h C positione dabitur.

Componetur ergo, ad DE in E constituendo angulum D E h aequalem angulo a D E: et quia a D E recto minor est, ergo duo anguli a D E, D E h simul minores duobus rectis; rectae D a, E h productae ad partes a h concurrent (per El. I, Ax. 11,). Concurrant igitur in A. Et sumtis D F, E G ad utrasvis rectae D E partes aequalibus utcumque, et ductis D G, E F; quia aequales sunt anguli A D E, A E D, aequales erunt rectae A D, A E (El. I, 6); quibus si addantur (vel auferantur) aequales D F, E G; erunt et totae (vel reliquae) A F, A G aequales. Ergo duae F A, A E duabus G A, A D aequales, et angulus ad A communis: hinc per El. I, 4. triangula A D G, A E F aequalia erunt.

§. 374.

Generalioribus duobus, quae his proximis respondent, Porismatis praemittimus sequens *Fig. 166.*

Theorema. Si in duabus parallelis AB, HC inde a sumtis duobus in ipsis punctis D, E, et easdem rec-

tae haec puncta jungentis D E partes abscindantur bina quaecumque segmenta aequalia D F, E G: rectae ab horum segmentorum terminis ad alterna illa puncta ductae F E, G D terminabunt triangula aequalia rectae duo illa puncta jungenti D E insistentia F D E, G E D.

Quoniam enim D F, E G parallelae sunt et aequales: quae earum terminos ad easdem partes jungunt rectae, D E, F G parallelae et ipsae erunt (El. I, 33.); ergo triangula F D E, G E D, quae super eadem basi et inter easdem parallelas sunt, aequalia erunt (I, 37.).

Corollarium. Hinc datis positione duabus rectis parallelis A B, H C, et in una earum A B dato puncto D, quolibet puncto in altera sumto si reliqua fiant ut ante, triangula terminabuntur aequalia.

Fig. 167 a. b. Porisma K. Datis positione duabus rectis non parallelis A B, H C, et in earum una A B dato puncto D; dabitur in altera H C punctum tale, ut inde ab ipso et a puncto D abscissis ad easdem recta illa puncta jungentis partes segmentis duobus utcumque aequalibus, recta ab horum segmentorum terminis ad alterna illa puncta ductae aequalia terminent triangula.

Sit punctum in H C inveniendum E; et sumtis segmentis D F, E G ad easdem junctae D E partes utcumque aequalibus; et junctis F E, G D: erunt triangula F D E, G E D aequalia per hypothesin Porismatis; ergo per El. I, 39. F G parallela D E. Et quia H C non est parallela ipsi A B (hyp.); ducatur per E ipsi A B parallela E I, quae primo cadat extra, et productae F G occurrat in I. Ergo in parallelogrammo D E I F erunt latera opposita E I, D F aequalia, et anguli oppositi E D F et I aequales (El.

Fig. 197, a.

I, 34.). Quoniam igitur E I aequalis D F; sed et E G aequalis D F (const.): erunt E I, E G aequales; et hinc anguli E I G, E G I aequales (I, 5.). Sed angulus quidem E I G ostensus est aequalis angulo E D F. angulus autem E G I aequalis est alterno G E D; (I, 29.). Ergo anguli A D E, H E D aequales sunt.

Si vero E I cadat intra, ostendentur ut ante, anguli E I G, E G I aequales; ergo et qui ipsis deinceps sunt, E I F, I G H aequales erunt. Est autem E I F quidem aequalis E D F ut opposito parallelogrammi, I G H vero aequalis D E H, exterior interiori (I, 29.). Rursus ergo anguli A D E, D E H aequales sunt. *Fig.* *167, b.*

Utroque igitur casu, quoniam datis positione duabus rectis A B, H C, et in una earum dato puncto D, ex hoc ad alteram ducta recta D E facit angulos cum utraque ad easdem partes aequales: per Lemma II. dabitur D E recta positione. Hinc et punctum E dabitur.

Componiturque, per Lemma II. ducendo rectam D E facientem angulos A D E, H E D aequales. Abscissis enim D F, E G utcumque aequalibus, et junctis F E, G D: erunt triangula F D E, G E D aequalia per El. I, 4..

Porisma L. Locus. Data recta D E, et alia per datum ejus extremum transeunte A D, positione data; invenietur recta per alterum prioris extremum E transiens et ad easdem ipsius partes sita, talis, ut abscissis ab ipsa et ab A D inde a punctis E, D segmentis quibuscumque binis aequalibus, et ab horum terminis ad alterna illa extrema ductis rectis, terminentur aequalia triangula super basi D E constituta. *Fig.* *168, a. b.*

Sit recta invenienda E H, et sumatur in A D punc-

tum quodcumque datum F: et ab EH abscisso segmento EG aequali DF, et junctis GD, FE; per hypothesin Porismatis erunt triangula GED, FDE aequalia. Quae quoniam super eadem basi DE sunt, erunt etiam inter easdem parallelas (El. I, 39.) hoc est, juncta FG, erit parallela DE. Quia autem datum est punctum F (hyp.): recta FG positione datae DE parallela, positione et ipsa dabitur. (Eucl. Dat. prop. 28. text. graec.). Et quia puncta F, D dantur, datur et FD magnitudine; quare et ipsi aequalis GE magnitudine datur. Hinc quum inter duas parallelas positione datas FG, DE ducta sit recta GE magnitudine data; faciet cum ipsis angulos datos per Eucl. Dat. prop. 33. text. graec.: dabitur ergo angulus HED. Et quia DE positione data est, et punctum E; recta quoque HE positione data erit.

Fig. 168. a. Componetur autem ita: Primo si angulus ADE sit rectus; ducatur HE ad DE perpendicularis (vel ipsi AD parallela): et abscissis utcumque aequalibus DF, EG, et junctis FE, GD, erunt triangula FDE, GED aequalia per El. I. Def. 10. et prop. 4.

Fig. 168. b. Si vero angulus ADE non sit rectus: ipsi aequalis ad DE in E constituatur angulus DEH (El. I, 23), et per E agatur ipsi DA parallela Eh (I, 32): et erit utraque rectarum EH, Eh Locus inveniendus. Nam 1°. abscissis ab DA, Eh aequalibus DF, EG utcumque, et junctis FE, GD; aequalia erunt triangula FDE, GED per El. I, 4. Tum 2°. abscissis ab DA, Eh aequalibus DF, Eg utcumque, et junctis FE, gD; quoniam DF, Eg et aequales et parallelae sunt: erit et (El. I, 33.) Fg parallela DE. Ergo triangula FDE, gED, quia super eadem basi et inter easdem parallelas sunt, aequalia erunt (El. I, 37).

Atque haec sufficiant exempla Porismatum ad nonnullas figurarum in Cap. II. vel IV. consideratarum: plura enim alia inveniri poterunt ad reliquas figuras Cap. II. et III. consideratas, vel respondentia aliis problematis Cap. IV. tractatis. Sed attingere tantum eam rem hoc loco voluimus, non absolvere: quod quidem solum opus foret peculiaris voluminis.

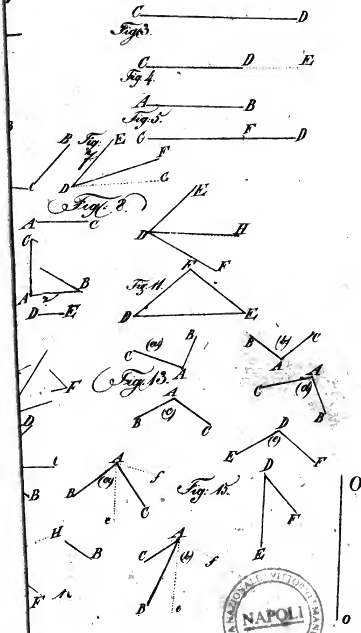
---

p. 365. l. 14.	prositione	leg.	positione
p. 366. l. 4. ab inf.	rectae Γ, ΔΓΕ	—	recta ΓΔ, ΓΕ
p. 369. l. 10. ab inf.	dabitur Δ punctum	—	dabitur punctum
— l. 9. ab inf.	differret: Sed	—	differret. Sed
— l. 7. —	§. proc.	—	§. praec.
p. 371. l. 8. —	habitudinc, in	—	babitudine: in
p. 372. l. 1.	Euclidis	—	Euclides
— l. 3.	μεταληγανο	—	μεταλαμρανο.
p. 375. l. 16.	radis	—	rectis
— l. ult.	quo supra et ut supra, facta	—	quo supra; et ut supra facta
p. 376. l. 1.	ut supra *LE*	—	ut supra *ΓE*
— l. 2.	ita hic *ΓE*	—	ita hic *ΓE'*
— l. 8.	problematis	—	problemati
p. 378. l. 12. ab inf.	in ipsa	—	in ipsis
p. 379. l. 8. ab inf.	positione data	—	magnitudine data
p. 383. l. 2. ab inf.	aequaliae	—	aequalia
p. 393. l. 14.	Eec, aequales	—	EeC aequales
p. 395. l. 11. ab inf.	εκ B, C	—	ex B, C
— — —	faciunt	—	faciant
— l. 3. ab inf.	utrumque	—	utcumque
p. 397. l. 5.	basin	—	basis
p. 403. l. 8. ab inf.	per eadem	—	per eandem
p. 405. l. 5. ab inf.	utrumque	—	utcumque
p. 408. l. 1.	παρερνον	—	παρεργον
— l. 10. ab inf.	AEA	—	AEH
p. 411. l. 15.	in Ad	—	in AD
p. 413. l. 7.	reliquas	—	reliqua

Corrigenda.

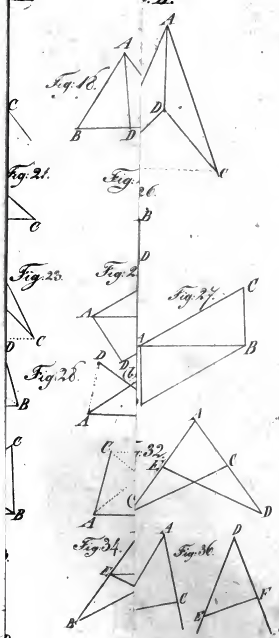
P. 11. Praef. lin. 13.	utrumque	leg.	utcumque
p. 24. lin. 21.	habent	—	habens
p. 26. lin. 4. ab inf.	sunt,	—	sunt:
p. 49. l. 8.	at	—	et
p. 66. l. 5.	*EB*	—	CB
p. 69. l. 5.	*κοιυφην*	—	*καρυφην*
p. 99. l. 5.	C et B.	—	C et D.
p. 112. l. 9. ab inf.	praebitur	—	praebitura
p. 161. l. 2.	bisectionis, in-	—	bisectionis in-
p. 174. l. 3. ab inf.	teneant specios	—	teneant, specie
p. 175. l. 5.	*αντι ερεφειν*	—	*αντιςρεφειν*
— l. 21.	*γενεα θαι*	—	*γενε αθαι*
— l. 22.	*αρΧεν*	—	*αρΧην*
— l. 23. 24.	*αρκην*	—	*αρΧην*
— l. 25.	*πυρεττεν*	—	*πυρεττειν*
p. 176. l. 16.	per (hy-	—	per hy-
— l. 7. ab inf.	*υκαλον*	—	*υ καλον*
— l. 6. ab inf.	*υκαλον*	—	*υ καλον*
— l. 5. ab inf.	*αντι υφασιν*	—	*αν τιφασιν*
p. 209. l, 3. ab inf.	*Εφαρμο της ΒΓ επισασηι*	—	*Εφαρμυσασης της ΒΓ επι*
p. 163. l. 21.	*αδυνατων*	—	*αδυνατον*
— l. 23.	*ισαι και*	—	*ιση, και*
p. 291. l. 14.	gencratiori	—	generatiori
p. 324. l. 2. ab inf.	Et. per Et.	—	Et per El.
p. 325. l. 15.	recta (D)	—	recta (CD)
— l. 7. ab inf.	puae Cap. VI.	—	quae Cap. III.
p. 332. l. 10.	esto	—	est
p. 337. l. 2.	intre medium	—	inter medium
p. 345. l. 13. ab inf.	Apolloni;	—	Apollonii
— l. 7. 6. ab inf.	expedimus	—	ex pendimus
p. 347. l. 7.	dicitus que	—	diciturque
p. 348. l. 16.	indeterminati	—	indeterminati
p. 349. l. 16.	proemio	—	pro oenio
— l. 21.	re *Γ*	—	res
— l. 3. ab inf.	aequaeles	—	aequales
p. 350. l. 9. ab inf.	angulos	—	angulus
p. 351. l. 20.	propositio	—	proposito
p. 354. l. 2.	*αποδειξεις*	—	*αποδαιξιν*
p. 359. l. 16.	*δεδουνων*	—	*δεδομενων*
— l. 25.	*εκδεσιν*	—	*εκθεσιν*
p. 360. l. 2.	notionum	—	notionem
— l. 10.	Postulati: tertii	—	Postulati tertii
p. 361. l. 4.	Sic	—	sic
p. 364. l. 4.	punctum *Δ*	—	punctum *Γ*
— l. 5. ab inf.	dico *ΔΘ*	—	dico *ΓΘ*

Tab. I.

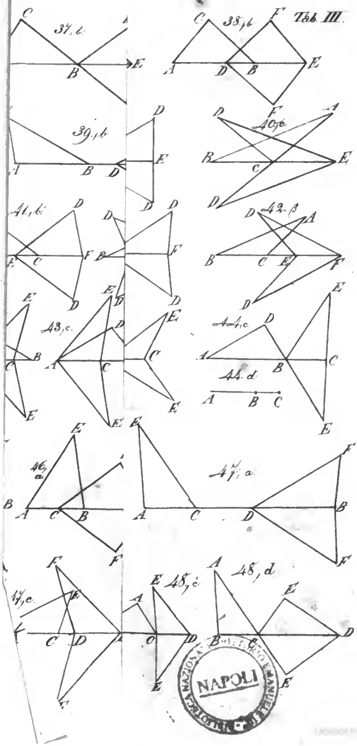


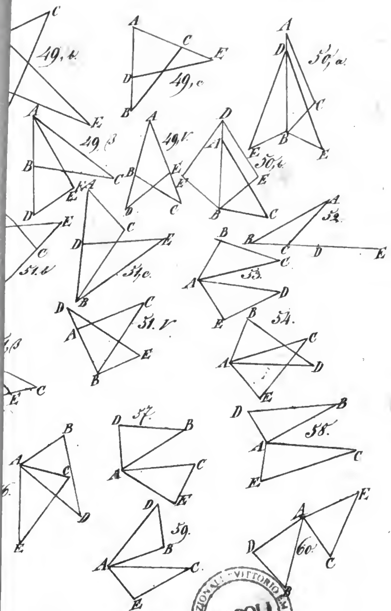
II.

T. II.

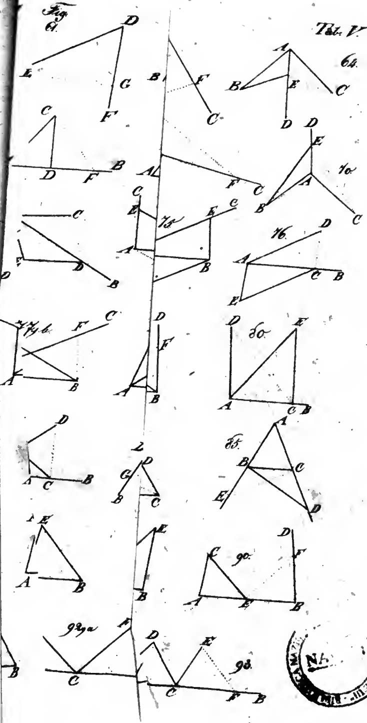


Tab. III.

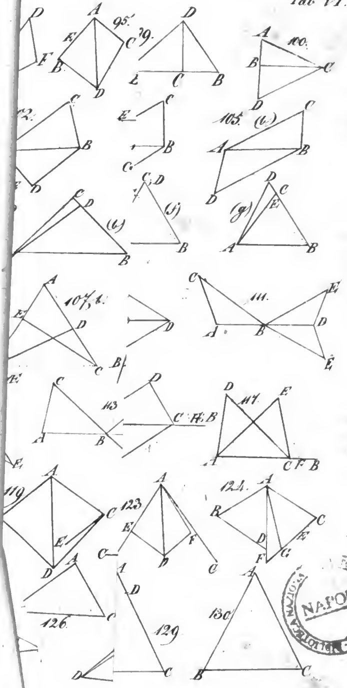



49,b
49,c
50,a
49,β
49,γ
50,b
51,b
51,c
52
53
51,γ
54
57
58
59
60

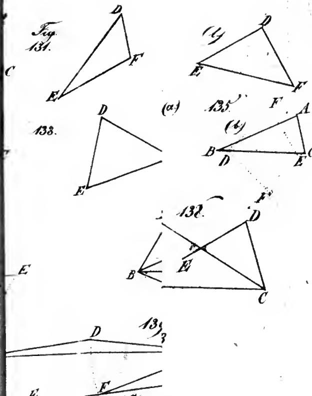
Tab. V.



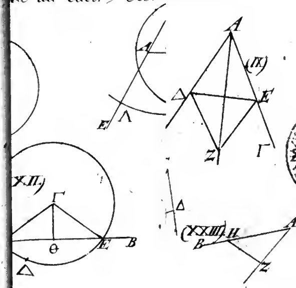
Tab. VI.



Tab. VII.



…ae ad Eucl. Elem. XII. XXIII.



Tab. VIII.

